

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

5. Folge, Band 9
Der ganzen Reihe 401. Band

Kuratorium:

F. Paschen M. Planck R. Pohl
A. Sommerfeld M. Wien E. Warburg

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin



I 9 3 I

LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Alle Rechte vorbehalten
Printed in Germany

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Inhalt

Fünfte Folge. Band 9

Erstes Heft

	Seite
Erich Habann-Berlin, Der Schwingkristall und die Ursachen seiner Wirkungsweise. (Mit 9 Figuren)	1
Viktor Weisskopf-Göttingen, Zur Theorie der Resonanzfluoreszenz	23
M. J. O. Strutt-Eindhoven (Holland), Strahlung von Antennen unter dem Einfluß der Erdbodeneigenschaften. D. Strahlungsmessungen mit Antennen. (Mit 15 Figuren)	67
H. Sauer-Jena, Berichtigung zu meiner Arbeit „Die linienhafte Absorption der Chromalaunkristalle“.	92
E. Giebe und A. Scheibe-Berlin-Charlottenburg, Über die Seriengesetze der elastischen Eigenfrequenzen von Quarzstäben. I. Teil: Dehnungsschwingungen. (Mit 21 Figuren)	93

Redaktionsschluß am 17. April 1931

Zweites Heft

E. Giebe und A. Scheibe-Berlin-Charlottenburg, Über die Seriengesetze der elastischen Eigenfrequenzen von Quarzstäben. I. Teil: Dehnungsschwingungen. (Mit 21 Figuren.) Schluß . . .	137
M. Alimowa-Rostow am Don, Untersuchungen des elektrischen Spektrums des Wassers mit gedämpften Schwingungen in dem Wellenlängenbereich von 2200—2900 mm. (Mit 1 Figur) . . .	176
J. Dantscher-München, Untersuchung der elektrischen Feldverteilung in dielektrischen Flüssigkeiten mittels der elektrischen Doppelbrechung (elektrooptischer Kerreffekt). (Mit 20 Figuren)	179
Fritz Sauter-München, Über den atomaren Photoeffekt bei großer Härte der anregenden Strahlung	217
Walther Deutsch-Frankfurt a. M., Ist die Wirkung der elektrischen Gasreinigung dem elektrischen Wind zu verdanken? (Mit 3 Figuren)	249

Redaktionsschluß am 25. April 1931

Drittes Heft

Seite

Heinrich Wommelsdorf-Berlin-Schöneberg, Neue Schaltungen für mehrpolige Influenz- und Kondensatormaschinen. (Mit vier Figuren)	265
Maria Göppert-Mayer-Baltimore (U.S.A.), Über Elementarakte mit zwei Quantensprüngen. (Mit 5 Figuren)	273
Moritz Renninger-München, Energieverlust und Streuung mittelschneller Elektronen beim Durchgang durch Gase (N_2). (Mit 18 Figuren)	295
W. Heisenberg-Leipzig, Bemerkungen zur Strahlungstheorie	338
W. Leo-Erlangen, Elektrisches und optisches Verhalten von Halbleitern. IV. Über Oberflächenladungen an Halbleitern im Vakuum. (Mit 6 Figuren)	347
H. Verleger-Bingerbrück, Der Thomsoneffekt in Cadmium- und Zink-Einkristallen. (Mit 5 Figuren)	366

Redaktionsschluß am 2. Mai 1931

Viertes Heft

Günter Braunsfurth-Berlin, Untersuchungen über die elektrische Leitfähigkeit dünner Metallschichten. (Mit 27 Figuren)	385
J. J. Sommer-München, Beiträge zur Stabilität elektrischer Stromkreise insbesondere von Wechselstromkreisen. (Mit 22 Figuren)	419
E. Rupp-Berlin-Reinickendorf, Über die Gültigkeit der de Broglieschen Beziehung für sehr schnelle Elektronen (220 kV). (Mit 3 Figuren)	458
Max Trautz-Heidelberg, Über wahrscheinliche Werte von C_v für Wasserdampf, Ammoniak, Methan und höhere Paraffine. (Mit 1 Figur)	465
W. Heuse u. J. Otto-Berlin-Charlottenburg: Eine neue gastermetrische Bestimmung von Fixpunkten unterhalb 0° in Verbindung mit Tensions- und Widerstandsthermometern. (Mit 2 Figuren)	486
G. I. Pokrowski-Moskau, Zur Theorie der möglichen Wirkung von Strahlung auf Atomkerne. (Mit 2 Figuren)	505

Redaktionsschluß am 7. Mai 1931

Fünftes Heft

Rudolf Weyrich-Brünn, Bemerkungen zu den Arbeiten „Zur Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs der Erdoberfläche“ und „Über das Strahlungsfeld einer endlichen Antenne zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen“	513
Wolfgang Zobel-Frankfurt a. M., Strahlungseigenschaften von oxydiertem Palladium. (Mit 10 Figuren)	519

Inhalt

VII

Seite		Seite
	W. Orthmann-Berlin, Über Dielektrizitätskonstanten von Elektrolytlösungen. (Mit 6 Figuren)	537
265	E. Justi-Charlottenburg, Über einen Thermostaten für den Temperaturbereich von 50° abs. bis 112° abs. (Mit 3 Figuren) .	570
273	Philip M. Morse und E. C. G. Stueckelberg-München, Strahlungslose Stoßprozesse bei kleinen Geschwindigkeiten. (Mit 12 Figuren)	579
295	Lothar Nordheim-Göttingen, Zur Elektronentheorie der Metalle. I. (Mit 11 Figuren)	607

Redaktionsschluß am 20. Mai 1931

Sechstes Heft

347	Lothar Nordheim-Göttingen, Zur Elektronentheorie der Metalle. (Mit 11 Figuren.) (Schluß)	641
366	Otto Bartelt-Frankfurt a. M., Über die Form der positiven Säule bei stoßweise periodischer Anregung. (Mit 11 Figuren) . .	679
385	E. Rumpf-Graz, Über interferometrische Abstandsmessungen in Benzol- und Tetrabromkohlenstoff-Molekülen mittels Röntgenstrahlen. (Mit 4 Figuren).	704
419	Raschco Zaycoff-Sofia, Zur relativistischen Synthese der Feldvorstellungen	715
458	W. Hubmann-Berlin-Tempelhof, Über die Stromleitung in dünnen Glasschichten bei hohen Feldstärken. (Mit 8 Figuren) . . .	733
465	C. Ramsauer u. R. Kollath-Berlin-Reinickendorf, Die Winkelverteilung bei der Streuung langsamer Elektronen an Gas-molekülen. (Mit 9 Figuren)	756
	W. Meyer zur Capellen, Druckfehlerberichtigung	768

Redaktionsschluß am 28. Mai 1931

Siebentes Heft

486	Chr. Gerthsen-Tübingen, Streuungsmessungen von H-Strahlen in Wasserstoff als Beitrag zur Klärung ihrer Wellennatur. (Mit 4 Figuren)	769
505	A. E. Herbert Meyer-Hanau a. M., Über den Rückgangseffekt in Alkalizellen. (Mit 26 Figuren)	787
513	Rolf Nübel-Münster i. W., Über die Thermokräfte von mit Wasserstoff beladenem Palladium, Eisen und Palladium-Silberlegierungen	826
519	H. E. Binkele-Heidelberg, Über die gastheoretischen Wirkungsquerschnitte der Moleküle	839

	Seite
Erich Lutze-München, Über die Richtungsverteilung der Photoelektronen kurzwelliger Röntgenstrahlen. (Mit 6 Figuren) . .	853
Hildegart Göthel-Dresden, Über den äußeren lichtelektrischen Effekt an Phosphoren und seine Abhängigkeit vom Erregungszustand. (Mit 12 Figuren)	865
W. Graffunder und R. Weber-Frankfurt a. M., Eine Schwebungsmethode zur Bestimmung der Dielektrizitätskonstanten leitender Flüssigkeiten. (Mit 11 Figuren)	887

Redaktionsschluß am 10. Juni 1931

Achstes Heft

A. Kneschke-Dresden, Über die Bewegung eines Wirbels um Quellen, Senken, Doppelquellen und feste Wirbel in der Halbebene. (Mit 6 Figuren)	905
A. Kneschke und S. Matthes-Dresden, Wirbelbewegung um einen Kreiszylinder. (Mit 4 Figuren)	916
E. Waetzmann und H. Heisig-Breslau, Untersuchungen über akustische Schwellenwerte. I. Über die Messung der Reizschwelle der Hörempfindung mit Resonanztelefonen. (Mit 21 Figuren)	921
Herbert Murawkin-Berlin, Nachtrag zu: Beiträge zur Theorie und Konstruktion eines Kreismassenspektrographen	974
Herbert Murawkin-Berlin, Nachtrag zu: Massenspektren von Gläsern, Salzen und Metallen nebst Konstruktion eines Kreismassenspektrographen	977
Max Trautz und Friedrich Kurz-Heidelberg, Die Reibung, Wärmeleitung und Diffusion in Gasmischungen. XV. Die Reibung von H_2 , N_2O , CO_2 und C_2H_6 und ihren binären Gemischen	981
Helmut Löhner-Stuttgart, Quantenhafte Geschwindigkeitsverluste langsamer Elektronen in N_2 . (Mit 8 Figuren)	1004

Redaktionsschluß am 17. Juni 1931

Seite

853

865

887

905

916

921

974

977

981

1004

QC
1
A6L3

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren und fort-
geführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 401. Band

Kuratorium:

F. Paschen M. Planck R. Pohl
A. Sommerfeld M. Wien E. Warburg

Unter Mitwirkung
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.
M. PLANCK, Berlin



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Im Jahre 1931 erscheinen die Bände 8, 9 und 10 mit je 8 Hefen. Der Abonnements-
preis beträgt pro Band Rm. 28.— zuzüglich Rm. 1.60 für Porto bei direkter Zusendung
für das Inland und Rm. 2.— für das Ausland. Redaktionsschluß am 17. April 1931.

Inhalt

	Seite
Erich Habann-Berlin, Der Schwingkristall und die Ursachen seiner Wirkungsweise. (Mit 9 Figuren)	1
Viktor Weisskopf-Göttingen, Zur Theorie der Resonanzfluoreszenz	23
M. J. O. Strutt-Eindhoven (Holland), Strahlung von Antennen unter dem Einfluß der Erdbodeneigenschaften. D. Strahlungsmessungen mit Antennen. (Mit 15 Figuren)	67
H. Sauer-Jena, Berichtigung zu meiner Arbeit „Die linienhafte Absorption der Chromalaunkristalle“.	92
E. Giebe und A. Scheibe-Berlin-Charlottenburg, Über die Seriesetze der elastischen Eigenfrequenzen von Quarzstäben. I. Teil: Dehnungsschwingungen. (Mit 21 Figuren)	93

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn **Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grünelsen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33**, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekanntgegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft können die Annalen zu einem Vorzugspreis beziehen.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Den zur Veröffentlichung eingereichten Abhandlungen ist die Mitteilung beizufügen, daß eine Publikation an anderer Stelle nicht erfolgt ist.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, welches jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

e

1

3

7

2

93

ge-
lat
en.
in
zu

en,

beit
lies
gen
en-

die

nd-
rist
tet.

Mit-
ist.

den
nu-
den
nau

titel
ika-



ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, 1931, BAND 9, HEFT 1

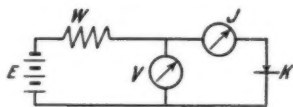
Der Schwingkristall und die Ursachen seiner Wirkungsweise Von Erich Habann

(Mitteilung aus dem Institut für Fernmeldetechnik der T. H. Braunschweig)

(Mit 9 Figuren)

Inhalt: Der Schwingkristall wird empirisch verbessert. An Hand von Experiment und Rechnung werden die Ursachen seiner fallenden Charakteristik aufgedeckt.

Eccles und Lossew¹⁾ entdeckten den negativen Widerstand von Kristallkontakten. Der äußere Aufbau eines solchen Kristallkontaktes ist dem der Detektoren der drahtlosen Telephonie analog: ein dünner Metalldraht lehnt im losen Kontakt gegen ein Mineral. Als Mineral kommen nur solche Leiter in Frage, die sich elektrolytisch nicht zersetzen. Bewährt haben sich bestimmte Sulfide, z. B. Bleiglanz und gewisse Oxyde wie Rotzinkerz. An solchen Kontakten nimmt man mit wachsendem Strom zuerst ein Steigen und dann ein Fallen der elektrischen Spannung wahr. Infolge dieser Eigenart ist nur die Schaltung nach Fig. 1 für die Untersuchung brauchbar. Der Widerstand w muß hier so hoch bemessen werden, daß der Spannungsabfall an ihm stets größer ist als an dem zu untersuchenden Kontakt K . Der Strom J ist dann im wesentlichen durch den Widerstand w bestimmt. Man variiert die Batteriespannung E oder den Vorschaltwiderstand w und beob-

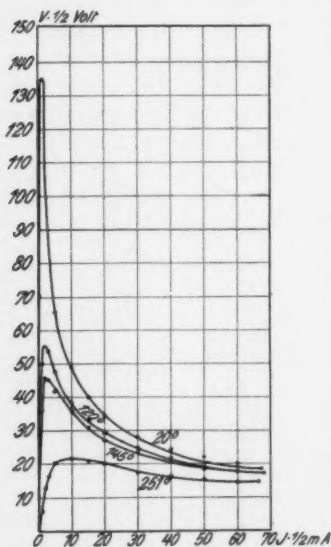


Meßschaltung

Fig. 1

1) O. W. Lossew, Der Krystadyne, Ztschr. f. Fernmeldetechnik S. 132. 1925. Oscillating Crystals, Radio News S. 1167. 1925. Oszillierende Kristalle, Ztschr. f. Fernmeldetechnik S. 97. 1926.

achtet zu jedem eingestellten Stromwert J am Kontakt den zugehörigen Spannungswert V . Im Gebiete der fallenden Charakteristik ist der Widerstand des Kontaktes negativ gegenüber Stromänderungen und hier in bekannter Weise zur Schwingungserzeugung benutzbar. Der Effekt tritt überhaupt oder besser hervor, wenn der Metalldraht bei den Sulfiden das positive, bei den Oxyden das negative Potential erhalten hat.



Charakteristik in Abhängigkeit von der Temperatur. Platindraht von 0,1 mm Durchmesser als negative Elektrode

Fig. 2

Wärme in der Kontaktstelle erzeugt werde und die Wärme den Übergangswiderstand ermäßige. Temperaturerhöhung wirkt in der Tat auf Spannung erniedrigend ein, wie es beispielsweise die Charakteristiken in Fig. 2 zeigen, die bei den verschiedenen Temperaturen von 20°, 120°, 145°, 251° an dem unten beschriebenen Kontakt aufgenommen worden sind.

Für die Ursache des negativen Widerstandes der Schwingkristalle sind zwei Theorien aufgestellt worden:

Die Charakteristik des Kristallkontaktes ist der des Lichtbogens analog. Nach Lossew stellt der Kristallkontakt einen Miniaturlichtbogen dar. Der Effekt beruht hiernach im wesentlichen auf Stoßionisation der Luft. Lossew vermag an einigen Schwingkristallen bei Stromdurchgang charakteristische Leuchterscheinungen nachzuweisen.

Sixtus¹⁾ zeigt an Experiment und Rechnung, daß für den Effekt die Wärme verantwortlich gemacht werden könne, insofern, als mit wachsendem Strom eine größere

1) K. Sixtus, Über den Schwingkristall, Ztschr. f. techn. Phys. S. 70. 1928.

Beide Anschauungen sind nicht stichhaltig.

Zur Stoßionisation der Luft sind mindestens 15—17 Volt notwendig. Viele der an Kontakten beobachteten Charakteristiken zeigen aber nur Spannungen, die weit unterhalb der notwendigen Ionisierungsspannung liegen. So ist beispielsweise im gesamten Verlaufe einer Charakteristik keine höhere Spannung wie 4 Volt beobachtet worden.

Mit einigen Kontakten lassen sich in Schwingenschaltung außerordentlich hohe Frequenzen von $12,3 \cdot 10^6$ Hertz¹⁾ erzeugen. Die Wärme aber ist nach allem, was wir von ihr wissen, zu träge, um derartig schnelle Schwankungen mitzumachen.²⁾

Die folgende Untersuchung setzt sich zum Ziel, zunächst die Ursachen der an Schwingkristallen beobachteten Erscheinungen aufzudecken.

Der Effekt der fallenden Charakteristik ist bei den Naturkristallen meistens nicht leicht zu beobachten. Man muß viele Stellen mit dem Metalldraht abtasten, ehe man einige brauchbare gefunden hat, und auch diese verändern sich mit der Zeit. Verhältnismäßig am besten tritt der Effekt noch an frischen Bruchstellen auf. Um stabile und reproduzierbare Verhältnisse für die Untersuchung zu schaffen, ist es notwendig, den Kontakt zunächst rein empirisch zu verbessern.

Es wurde vermutet, daß die Kristallstruktur der Mineraelektrode wesentlich am Effekt beteiligt sei. Danach müßte die fallende Charakteristik um so besser hervortreten, je reiner die kristallinen Formen des Minerals ausgebildet sind, und sich hier vielleicht an bevorzugten Flächen besonders geltend machen. Für die Untersuchung wurde der Bleiglanzkrystall gewählt. Er findet sich in der Natur gut ausgebildet vor, kristallisiert in Würfeln, läßt sich leicht spalten und hat ein einfaches Gefüge: Auf eine einfache Schicht Bleiatome folgt nebeneinander und übereinander eine einfache Schicht Schwefelatome. Bei einer solchen Struktur ist eine Ungleichwertigkeit zweier gegenüberliegenden Würfelflächen im Kontakt zu erwarten. Dies konnte aber nicht beobachtet werden. Dafür

1) Vgl. Fußnote 1, S. 1.

2) Vgl. hierüber Ettenreich, *Phys. Ztschr.* 21. S. 208. 1920 und Lehnhardt, *Der Detektor*, S. 40, 86. Berlin 1926.

konnte festgestellt werden, daß auf derselben Kristallfläche die wirksamen Stellen meistens dicht beisammen lagen. So wurde der Verdacht rege, daß für den Effekt zwar nicht die kristalline Form, aber Verunreinigungen, die der Naturkristall enthielt, von Bedeutung seien. Und so war es auch. Der natürliche Bleiglanzkristall enthält bekanntlich Verunreinigungen von Silber-, Antimon-, Eisen- und Zinksulfid. Bleisulfid, mit 4—10 Proz. Zinksulfid zusammengeschmolzen, liefert eine Elektrode mit brauchbaren Kontaktstellen. Eine genauere Untersuchung hat dann ergeben, daß für den Grundstoff eine gleichgeartete Verbindung eines bestimmten anderen Metalls als Beimengung spezifisch ist und daß die verbessernde Wirkung der Beimengung bei verhältnismäßig kleinen Mengen auftritt und ein Optimum hat. Den Erfolg dieser Erkenntnis beweist die außergewöhnliche Charakteristik der Fig. 2 mit der Spitzenspannung von $185 \cdot \frac{1}{2}$ Volt! Die betreffende Elektrode bestand aus Zinkoxyd und 2—3 Proz. Kupferoxyd und wurde hergestellt, indem die beiden Oxyde fein pulverisiert, gemengt und in einem Quarzrohr zwischen zwei Graphitstiften mit Wechselstrom geschmolzen wurden. Ein Teil der Schmelze war am Graphitstift haften geblieben. Dieser Stift diente in Fig. 2 und für die folgenden Untersuchungen als Kontaktelektrode, indem ein Metalldraht von 0,1—0,3 mm Durchmesser (in Fig. 2 Platin von 0,1 mm Durchmesser) mit seiner Spitze die am Graphitstift haftende Oxydmasse berührte.

Jetzt sind wir in der Lage, nach der Ursache der fallenden Charakteristik zu forschen.

Der Stromübergang zwischen der Kathode und der Anode im Kontakt wird durch zwei Faktoren geregelt. Der Strom hängt erstens davon ab, mit welcher Kraft die Elektronen in der Kathode erfaßt und in den Kontaktraum befördert werden. Die elektrische Feldstärke an der Kathode ist hierfür maßgebend. Zweitens wird der Elektronenstrom um so leichter fließen, je weniger er durch die reinen Widerstandshindernisse im Kontaktraum gehemmt wird. Das Widerstandshindernis kann hier nur das Medium, also die Luft sein. Der erste Faktor, die elektrische Feldstärke, wird natürlich immer eine Rolle spielen. Ob der zweite Faktor, der Widerstand des Mediums, zu beachten ist, muß untersucht werden.

Der Widerstand wird bestimmt durch die Dichte des Mediums und durch die Länge und den Querschnitt des Elektronenstromweges im Medium.

Die Länge des Stromweges ist identisch mit dem Kontaktabstand. Wenn der Widerstand des Mediums, hier also der Kontaktabstand, die Form der Charakteristik überhaupt beeinflusst, dann muß sich der Kontaktabstand mit der Stromstärke ändern. Und wird die Form der Charakteristik durch die Änderung des Kontaktabstandes wesentlich bedingt, so muß sich die Form der Charakteristik auch in der Kontaktabstandsänderung ausdrücken, insbesondere muß im fallenden Teile der Charakteristik mit wachsendem Strom der Kontaktabstand kleiner werden. Daß sich der Kontaktabstand mit der Stromstärke verändert, hat Seidl¹⁾ beobachtet. Der Kontakt, mit entsprechend bemessener Selbstinduktion und Kapazität zu einem Schwingungskreis zusammengeschaltet, liefert im Gebiet der fallenden Charakteristik niederfrequente elektrische Ströme im Schwingungskreis. Diese Ströme ändern im selben Rhythmus den Kontaktabstand. Der Kontakt wird so zu einer akustischen Tonquelle.

Beobachtet man aber bei der Aufnahme der statischen Charakteristik den Kontaktdraht unter dem Mikroskop bei 650facher Vergrößerung — der Kontaktdraht hat genügend Rillen, die als Fixierungspunkte dienen können — so sieht man mit wachsendem Strom den Draht sich im Sinne einer Vergrößerung des Kontaktabstandes verschieben. Demnach treten zwar Abstandsänderungen mit den Stromänderungen auf, aber nicht in dem Sinne, daß sie als Ursache der fallenden Charakteristik gedeutet werden können. Die Abstandsänderung ist lediglich eine Begleiterscheinung.

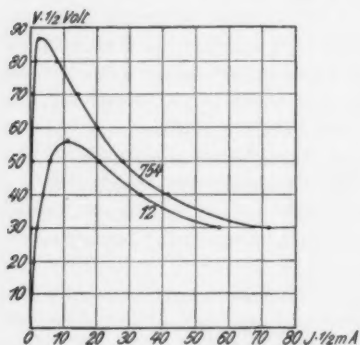
Der Querschnitt des Elektronenstromes könnte nur dann das Fallen der Charakteristik unterstützen, wenn er sich mit wachsendem Strom beträchtlich vergrößerte. Für die Anschauung würde sich so das folgende Bild ergeben: Bei kleinem Strom würden die Elektronen in einem engsten Stromfaden von der Kathode zur Anode hinüberfließen. Mit stärker wer-

1) F. Seidl, Phys. Ztschr. 27, S. 64, 816. 1926; K. Lichten-ecker, Seidls selbsttönender Kristall, Ztschr. f. techn. Phys. S. 161. 1927; A. Ensbrunner, Der selbsttönende Kristall und das membran-lose Telephon. Telegraphen- und Fernsprechtechnik S. 285. 1928.

dendem Strom würde sich der Querschnitt des Stromfadens beträchtlich vergrößern, bis einer weiteren Vergrößerung die Abmessungen der benutzten Elektroden Grenzen setzen. Die Tiefe des Fallens der Charakteristik würde also im wesentlichen durch den Querschnitt der Metalldrahtelektrode bestimmt werden, und bei genügend dünnem Draht müßte erst gar kein Fallen der Charakteristik eintreten. In dieser Richtung angestellte Versuche mit Elektroden verschiedenen Querschnitts zeigten nicht den erwarteten Einfluß. Am Zustandekommen

der fallenden Charakteristik ist der Querschnitt des Widerstandes nicht beteiligt.

Der Einfluß der Dichte des Mediums auf die Charakteristik kann unmittelbar geprüft werden. Die Fig. 3 zeigt zwei Charakteristiken, die an demselben Kontakt einmal bei 754 mm und das andere Mal bei 12 mm Luftdruck aufgenommen worden sind.¹⁾ Die Dichteverringern wirkt erniedrigend auf alle Spannungen. Danach könnte die Dichte



Charakteristik in Abhängigkeit vom Luftdruck. Negative Elektrode: Eisendraht von 0,1 mm Durchmesser

Fig. 3

kommen der fallenden Charakteristik beteiligt sein, wenn die Dichte ihrerseits vom Strom beeinflusst würde und zwar in dem Sinne, daß sie sich mit wachsendem Strom verkleinerte. Die Hypothese klingt plausibel. Merkwürdig ist allerdings der außerordentliche Druckunterschied, der notwendig ist, um die Spannungen so sehr zu verändern, wie es die fallende Charakteristik verlangt. Daher ist eine Bestätigung der Hypothese erwünscht.

Wenn das Medium den Elektronen bei ihrem Fluß durch den Kontaktraum einen Widerstand entgegensetzt, der um so größer ist, je dichter das Medium ist, so muß sich diese Eigen-

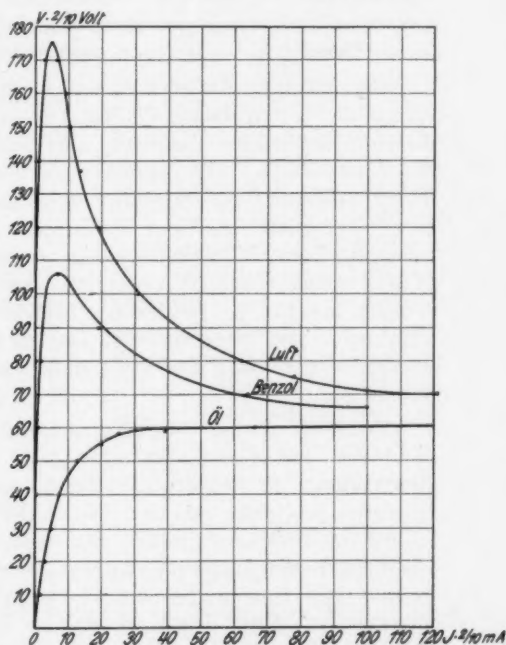
1) Vakuumversuche finden sich bereits in der Arbeit von Sixtus.

schaft besonders bemerkbar machen, wenn man von dem Medium Luft zu dem dichteren Medium einer nichtleitenden Flüssigkeit übergeht. Die Wahl fiel auf physikalisch so verschiedene Flüssigkeiten wie Benzol und Rizinusöl, das letztere in Physikerkreisen

mehr wegen seiner Dipoleigenschaft und hohen Kapillarkonstante beliebt und deswegen auch hier verwendet. Dem Kontakt, der in Luft die obere Charakteristik in Fig. 4

ergab, wurde ein Tropfen Benzol oder ein Tropfen Rizinusöl hinzugesetzt. Das Benzol verdunstete mit der Zeit. Nach dem Verdunsten trat wieder die Luftcharakteristik hervor. Das Rizinusöl war haftbarer. Der Kontakt war aber so stabil und die Verhältnisse waren derart reversibel, daß der unter Strom befindliche Rizinusölkontakt bequem

mittels Benzol gewaschen werden konnte. Es trat dann immer mehr die Benzolcharakteristik hervor und nach dem Verdunsten des Benzols die Luftcharakteristik. So konnten die Einflüsse der Medien nacheinander verfolgt werden. Die Ergebnisse, an demselben unverändert gelassenen Kontakt aufgenommen, sind in der Fig. 4 festgehalten. Das Gegenteil von dem erwarteten Effekt ist der Fall. Die Spannungen liegen in dem dichteren



Charakteristik in Abhängigkeit vom Medium.

Negative Elektrode:

Eisendraht von 0,1 mm Durchmesser

Fig. 4

Medium der Flüssigkeiten durchweg niedriger als in dem Medium der Luft! Somit spielt die Dichte des Mediums nicht die von der fallenden Charakteristik geforderte Rolle. Damit scheidet der Widerstand überhaupt als für die fallende Charakteristik unwesentlich aus unserer Betrachtung aus und der erste Faktor, die elektrische Feldstärke an der Kathode, muß allein für die Form der Charakteristik verantwortlich gemacht werden.

Der Elektronenstrom wird nun durch die elektrische Feldstärke an der Kathode bedingt, die elektrische Feldstärke ihrerseits ist von der Spannung am Kontakt abhängig. Unter der Voraussetzung, daß die elektrische Feldstärke lediglich von dieser Spannung hervorgerufen wird, muß mit wachsendem Elektronenstrom, also mit wachsender Feldstärke auch die Spannung am Kontakt ständig zunehmen. Die fallende Charakteristik zeigt das Gegenteil. Demnach ist die Voraussetzung falsch: die elektrische Feldstärke an der Kathode muß noch von einer anderen elektrischen Kraftquelle verursacht werden und das kann naturgemäß nur eine Raumladung sein.

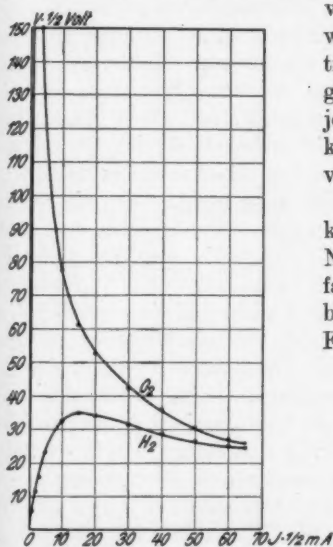
Welcher Art ist die Raumladung? Sie rührt zunächst nicht von den reinen Elektronen her. Denn dann wäre die Raumladung um so stärker, je langsamer sich die Elektronen bewegen, je dichter also das Medium ist. Die negative Raumladung der Elektronen müßte sich danach in einer Flüssigkeit wie Benzol oder Rizinusöl viel stärker bemerkbar machen wie in Luft: die Spannungen der Charakteristik müßten in Luft allgemein niedriger liegen wie in der Flüssigkeit. Das Umgekehrte ist nach Fig. 4 der Fall. So kann die Ladung des Kontaktraumes bei Luft nur von positiv oder negativ aufgeladenen Luftteilchen herrühren. Die Entscheidung über das Vorzeichen der Ladung fällt der folgende Versuch: Man beobachtet bei konstantem Strom und somit auch konstanter Kathodenfeldstärke die Spannung am Kontakt, einmal, wenn sich der Kontakt im Vakuum befindet, das andere Mal, wenn er sich in Luft von Atmosphärendruck befindet. Eine positive Raumladung sucht die Feldstärke an der Kathode und damit den Strom zu vergrößern. Dieses Streben der positiven Raumladung wird bei gewaltsam konstant gehaltenem Strom durch geringere Spannung am Kontakt kompensiert: die Spannung muß bei konstant gehaltenem Strom im Vakuum

größer sein als in Luft von Atmosphärendruck. Umgekehrt liegen die Verhältnisse bei negativer Ladung der Luft. Fig. 3 zeigt deutlich bei jedem Strom eine höhere Spannung in Luft von Atmosphärendruck als im Vakuum: die Luftteilchen sind negativ geladen.

Und jetzt wird auch klar, warum die Flüssigkeiten schlechter wie Luft funktionierten: die Flüssigkeitsmoleküle

vermochten nicht in dem Maße wie die Luftmoleküle sich Elektronen anzueignen und so negative Ionen zu bilden. Und jetzt bietet sich eine Möglichkeit, den Kontakt sowohl zu verbessern wie zu verschlechtern.

Die Gase entwickeln bekanntlich¹⁾ eine verschiedene Neigung, Elektronen einzufangen und negative Ionen zu bilden. Sauerstoff besitzt die Fähigkeit, Wasserstoff zeigt sie



Charakteristik in Sauerstoff und in Wasserstoff. Negativer Pol:
Eisendraht von 0,1 mm Durchmesser

Fig. 5



Charakteristik bei positiver Polung des Eisendrahtes (0,1 mm Durchmesser)

Fig. 6

kaum. Diese charakteristischen Unterschiede müssen sich sofort bemerkbar machen, wenn der Kontakt in Wasserstoff von Atmosphärendruck gesetzt wird und der Wasserstoff dann durch reinen Sauerstoff ersetzt wird. Fig. 5 zeigt das Verhalten desselben Kontaktes in den beiden Medien: In Wasser-

1) Vgl. z. B. A. Güntherschulze, Elektrische Gleichrichter und Ventile, S. 30. Berlin 1929.

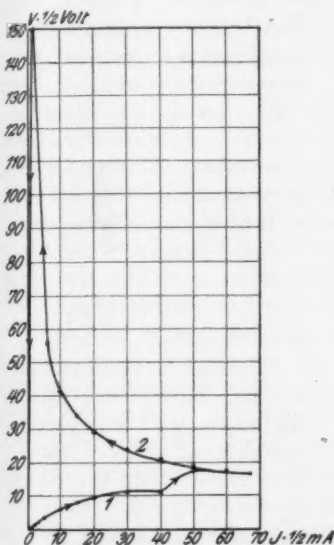
stoff wird eine schlechte, in Sauerstoff eine ungewöhnlich gute und steile Charakteristik wahrgenommen, deren sehr hohe Spitzenspannung weit außerhalb des Skalenbereiches des betreffenden Meßinstrumentes gelegen hat.¹⁾

Nach diesen Erkenntnissen muß uns daran gelegen sein, die Bildung der Raumladung genauer zu verfolgen. Es ist nicht anzunehmen, daß die Gasteilchen von vornherein die Ladung besitzen. An frischen Kontaktstellen muß die Entstehung der Raumladung zu beobachten sein. Nach einigem Abtasten mit dem Metalldraht wurden nun Stellen gefunden, die ein merkwürdiges Verhalten zeigten. War dem Metalldraht das positive Potential gegeben, so erhielt man eine Charakteristik nach Fig. 6. Sie unterschied sich in nichts von der bei Detektoren bekannten Charakteristik und war nirgends fallend. Sie ändert sich auch nicht, wenn sie mehrmals hin und her durchlaufen wurde. Wurde dann umgepolt und dem Metalldraht das negative Potential gegeben, so beobachtete man an demselben Kontakt zunächst (Fig. 7, Kurve 1) eine Charakteristik, die der in Fig. 6 glich. Bei einer bestimmten Stromstärke ($40 \cdot \frac{1}{2}$ mA) machte sich aber ein seltsames Steigen der Spannung bemerkbar und die Charakteristik verlief weiterhin in einer höheren Spannungslage. Beim Zurückvariieren des Stromes erschien die fallende Charakteristik in ausgezeichneter Klarheit (Kurve 2 in Fig. 7) und fortan wurde — man mochte den Strom hin und her variieren, so oft man wollte — bei dieser Polung nur noch Charakteristiken von der letzten Art (Kurve 2) wahrgenommen. Sie bildeten sich immer schöner aus, wo das noch möglich war. Polte man nun wieder um und gab dem Metalldraht wieder das positive Potential, so wurde die zuletzt erschienene Form (Kurve 2 von Fig. 7) auch bei der positiven Polung zunächst beibehalten (Kurve 3 in Fig. 8). Beim Zurückvariieren des Stromes aber trat die Charakteristik 4 in Fig. 8 hervor und fortan wurde bei dieser Polung nur noch die der positiven Polung eigentümliche

1) Es ist interessant, daß der Kontakt gerade in Wasserstoff versagt, der sich unter den Gasen wegen seiner guten Wärmeleitfähigkeit auszeichnet und der doch für das Funktionieren der Poulsenlampe ein unerläßlicher Bestandteil ist. Hier liegt ein einfacher experimenteller Beweis vor, daß es sich bei dem Kontakt weder um einen Miniaturlichtbogen handelt, noch die fallende Charakteristik durch Wärmeeffekte zustande kommt.

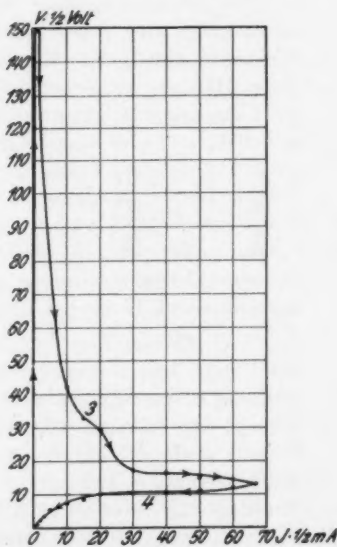
Charakteristik 4 durchlaufen, wie sie ursprünglich in Fig. 6 beobachtet wurde. So war der Zustand wieder erreicht, von dem wir ausgegangen waren. Das Spiel konnte an demselben Kontakt wiederholt werden.

Die Charakteristiken zeigen auf das deutlichste das Zustandekommen der negativen Raumladung. In Fig. 6 ist sie



Charakteristik bei negativer
Polung des Eisendrahtes
(0,1 mm Durchmesser)

Fig. 7



Charakteristik bei positiver
Polung des Eisendrahtes
(0,1 mm Durchmesser)

Fig. 8

noch nicht vorhanden, an den höheren Spannungen der Kurven in Figg. 7 und 8 macht sie sich kenntlich. Die Raumladung entsteht und vergeht danach unter dem Einfluß des elektrischen Stromes. Ihre Bildung ist von der Polung und der Stromstärke abhängig.

Wir werden allen diesen Erscheinungen mit den folgenden einfachsten Annahmen gerecht: Die negativ geladenen Gas-teilchen entstehen durch Vereinigung von Elektronen mit den neutralen Gasteilchen. Zwischen den drei Komponenten be-

steht ein dynamisches Gleichgewicht. An der Kathode werden die Elektronen hauptsächlich auf die ungeladenen Gasteilchen übergehen, an der Anode werden die geladenen Gasteilchen, die doch infolge des elektrischen Feldes zur Anode hinbewegt werden und hier mit einiger Wucht aufprallen, meistens ihre Ladung abgeben.

Die Wechselwirkung zwischen Elektrode, Elektron und Gasteilchen wird außer von der Stromstärke vom Material der Elektrode abhängen. Man wird annehmen können, daß diese Materialkonstante unabhängig von der Stromrichtung ist. Sind die beiden Elektroden in der Materialkonstanten sehr verschieden, so ist es klar, daß bei derselben Stromstärke bei der einen Polung eine Zunahme der Raumladung, bei umgekehrter Polung aber eine Abnahme der Raumladung stattfinden muß. Der Einfluß des Raumes zwischen Kathode und Anode kann hierbei außer acht bleiben, weil er bei derselben Stromstärke in beiden Stromrichtungen dieselbe Rolle spielt und also nicht die Unterschiede in der Raumladung hervorrufen kann.

Die Bildung der Raumladung erscheint so genügend geklärt und ihre Notwendigkeit für die fallende Charakteristik erwiesen. Wie kommt nun unter dem Einfluß der Raumladung die fallende Charakteristik zustande? Man könnte meinen, daß sich die gesamte Raumladung mit der Stromstärke verändert und so die fallende Charakteristik hervorruft. Veränderungen der Raumladung aber erfolgen sehr träge. Um z. B. die geschilderten Erscheinungen der Charakteristiken in den Figg. 6—8 klar hervortreten zu lassen, tut man gut, an den Umkehrpunkten (bei $67 \cdot \frac{1}{2}$ mA) den Strom einige Minuten wirken zu lassen, während die Charakteristik selbst am besten rasch durchlaufen wird. So muß der Schluß gezogen werden, daß die gesamte Raumladung im Gebiet der fallenden Charakteristik im wesentlichen konstant bleibt und unter dem Einfluß des Stromes nur eine andere Verteilung der Ladung im Kontaktraum stattfindet. Und dies gibt uns den Schlüssel zu der folgenden Theorie:

Im Kontaktraum (Fig. 9) existieren zwei Schichten geladener Gasteilchen von verschiedener Dichte. An der Kathode befindet sich eine Schicht von der Dicke δ_1 . In dieser Schicht herrsche die Dichte σ_1 . Im übrigen Raum herrsche die Dichte σ_2 . Beide Schichten werden unter dem Einfluß der Wärmebewegung

ihre Gasteilchen ständig austauschen: es wird ein dynamisches Gleichgewicht herrschen, d. h. σ_1 wird σ_2 proportional sein.

$$(1) \quad \sigma_1 = k_1 \sigma_2.$$

Mit k, h, p sind in dieser Arbeit die Konstanten bezeichnet. Die gesamte Raumladung S ist dann

$$(2) \quad S = \sigma_1 \delta_1 + \sigma_2 \delta_2$$

und diese soll unveränderlich sein.

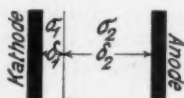
Die Vorstellungen werden mit denen der Adhäsionstheorie in Einklang gebracht, wenn wir die geladenen Gasteilchen in einer einfachen aber sehr dichten Lage die Kathode bedecken lassen, δ_1 also gegenüber δ_2 als sehr klein, σ_1 aber gegenüber σ_2 als beträchtlich annehmen.

Die Verhältnisse im Kontakt werden, wie z. B. aus der Charakteristik in Fig. 2 hervorgeht, nicht von der Spannung, sondern vom Strom beherrscht. Denn zu jedem Strom gehört eindeutig nur eine bestimmte Spannung. Dagegen gehören zu einer bestimmten Spannung (z. B. $66 \cdot \frac{1}{2}$ Volt in Fig. 2) zwei verschiedene Ströme ($0,2 \cdot \frac{1}{2}$ mA und $5 \cdot \frac{1}{2}$ mA).¹⁾ Daher müssen wir auch in der Theorie, um eindeutige Verhältnisse zu schaffen, alles auf den Strom beziehen, oder, da der Strom von der an der Kathode herrschenden Feldstärke F_k verursacht wird, alles auf die Feldstärke F_k zurückführen.

Die elektrische Feldstärke F_k befördert die Elektronen aus der Kathode zur Anode hinüber. Sie wirkt in gleicher Weise auf die an der Kathode haftende Schicht von negativ geladenen Gasteilchen ein und sucht sie von der Kathode abzuheben und in den Kontaktraum zu entfernen. Die Feldstärke F_k wird demnach das durch 1 gekennzeichnete Gleichgewicht verschieben, in der Weise, daß für $F_k = 0$ $\sigma_1 = k_1 \sigma_2$ resultiert, für $F_k = \infty$ aber $\sigma_1 = 0$ wird. Diesen Forderungen wird

$$(3) \quad \sigma_1 = \frac{k_1 \cdot \sigma_2}{1 + k_1 \cdot F_k}$$

1) Es ist interessant, daß die Verhältnisse bei Röhren mit fallender Charakteristik gerade umgekehrt liegen.



Schema des
Kontaktraumes

Fig. 9

gerecht. In Verbindung mit 2 ergibt sich

$$\sigma_1 = \frac{k_1 \cdot S}{\delta_2 + k_1 \delta_1 + k_2 \delta_2 \cdot F_k}$$

also eine Formel von der Form

$$(4) \quad \sigma_1 = \frac{k_3 S}{1 + k_4 F_k}.$$

Der elektrische *Strom* J wird in der Hauptsache durch die Elektronen dargestellt, die, ohne sich anzulagern, direkt von der Kathode zur Anode übergehen. Der Elektronenfluß hängt von der Feldstärke F_k an der Kathode ab. So folgt $J = f_1(F_k)$.

Von der Funktion f_1 wissen wir, daß darin mit Rücksicht auf die mannigfaltigen Geschwindigkeiten, mit denen die Elektronen aus der Kathode austreten, das Maxwellsche Verteilungsgesetz enthalten sein muß: $J = e^{f_2(F_k)}$

Über die Funktion f_2 können wir weiter nichts aussagen. Wir entwickeln daher die Funktion nach Maclaurin und begnügen uns in erster Annäherung mit den ersten beiden Gliedern der Reihe:

$$f_2(F_k) = f_2(0) + \frac{F_k}{1!} f_2'(0) + \dots \cong k_5 + k_6 \cdot F_k.$$

So folgt für J eine Form

$$(5) \quad J = k_7 \cdot e^{k_6 \cdot F_k}$$

Die elektrische *Spannung* V am Kontakt läßt sich bei gegebenem F_k und gegebenen Raumladungen σ_1 und σ_2 aus der Laplaceschen Gleichung $\Delta \varphi = k_8 \cdot \sigma$ unter der Voraussetzung berechnen, daß die Dichte innerhalb jeder Schicht überall denselben Wert hat:

$$(6) \quad V = (\delta_1 + \delta_2) F_k + k_8 \sigma_1 \delta_1 (\delta_1 + 2\delta_2) + k_8 \sigma_2 \delta_2^2$$

oder unter Benutzung von 2

$$(7) \quad V = (\delta_1 + \delta_2) F_k + k_8 \sigma_1 \delta_1 (\delta_1 + \delta_2) + k_8 S \delta_2.$$

Mit 4, 5, 7 sind alle drei Größen σ_1 , J , V zu der an der Kathode herrschenden Feldstärke F_k in Beziehung gesetzt und so folgt aus diesen Gleichungen schließlich:

$$V = (\delta_1 + \delta_2) \cdot \frac{1}{k_6} \cdot \ln \left(\frac{J}{k_7} \right) + k_8 S \delta_2 + k_8 \frac{\delta_1 (\delta_1 + \delta_2) \cdot k_3 \cdot S \cdot k_8}{k_6 + k_4 \cdot \ln \left(\frac{J}{k_7} \right)}$$

also eine Gleichung von der Form:

$$(8) \quad V = h_0 + h_1 \ln J + S \left[h_2 + \frac{h_3}{1 + h_4 \ln J} \right].$$

Ohne Raumladung ($S = 0$) wäre

$$(9) \quad V_1 = h_0 + h_1 \ln J.$$

Die Spannung V in (8) setzt sich hiernach aus zwei Werten $V = V_1 + V_2$ zusammen, wobei

$$V_2 = S \left[h_2 + \frac{h_3}{1 + h_4 \ln J} \right]$$

ist und V_2 allein den Einfluß der Raumladung wiedergibt. Durch V_1 wird mit wachsendem Strom J nur ein Steigen der Spannung hervorgerufen, V_2 aber bedingt den fallenden Teil der Charakteristik. In Fig. 6 ist die Gleichung (9) enthalten. Die Kurve stimmt überein mit der unteren Charakteristik 1 in Fig. 7, so weit, als hier keine Raumladung auftritt.¹⁾ Zwischen $J = 20$ und $J = 70$ ist in Fig. 6 V_1 fast konstant. In dem Bereich $J = 0$ bis $J = 20$ ändert sich zwar V_1 mit J , aber diese Änderungen fallen gegenüber den entsprechenden Änderungen in der Kurve 2 der Fig. 7 kaum ins Gewicht: V_1 kann im Rahmen der Gleichung (8) als konstant angesehen werden. So folgt aus (8) und (9) für die fallende Charakteristik

$$V = V_1 + S \left[h_2 + \frac{h_3}{1 + h_4 \ln J} \right]$$

also eine Gleichung von der Form

$$(10) \quad (V + p_0)(p_1 + \ln J) = p_2$$

oder

$$(11) \quad J = e^{-p_1 + \frac{p_2}{V + p_0}}.$$

Setzt man hierin $p_0 = 15,1$, $p_2 = 139,36$, $p_1 = 0,16$, so erhält man eine Kurve, die sich im fallenden Teil so vollständig der Kurve 2 in Fig. 7 anschmiegt, daß ihre zeichnerische Wiedergabe sich erübrigt. Die Gleichung (10) kann vereinfacht werden:

$$p_2 = (V + p_0)(p_1 + \ln J) = (V + p_0)[p_1 - \ln p_3 + \ln(p_3 J)].$$

1) Aus der Übereinstimmung der beiden Kurven ergibt sich die interessante Tatsache, daß sich die beiden Elektroden — Eisen und die beschriebene Schmelze — in ihrer Emissionsfähigkeit von Elektronen kaum unterscheiden.

Hierin ist p_3 eine willkürliche Konstante. Wir wählen sie so, daß die Reihe für $\ln(p_3 J)$ rasch konvergiert und nach dem ersten Gliede abgebrochen werden kann. Dann resultiert

$$p_2 = (V + p_0) \left(p_1 - \ln p_3 + 2 \frac{p_1 J - 1}{p_1 J - 1} \right)$$

also eine Gleichung von der Form

$$(12) \quad (V + p_4)(J + p_5) = p_6.$$

Die Hyperbel gibt für $p_4 = -12$, $p_5 = 2$, $p_6 = 374$ den fallenden Teil der Charakteristik in Fig. 7 noch recht gut wieder. In der Tabelle sind alle errechneten Daten den experimentellen gegenübergestellt.

Tabelle

$V \cdot \frac{1}{2}$ Volt	$J \cdot \frac{1}{2}$ mA experimentell	$J \cdot \frac{1}{2}$ mA berechnet nach (11)	$J \cdot \frac{1}{2}$ mA berechnet nach (12)
150	1,5	2,0	0,6
56	6	6,0	6,5
41,5	10	10,0	10,7
34	15	14,6	15
29,2	20	19,8	19,7
24	30	30,1	29,2
21,1	40	40,0	39,1
19	50	50,7	51,4
17,6	60	60,4	64,8
16,8	67	67,2	76

Aus der guten Übereinstimmung der theoretischen Ergebnisse mit der praktischen Erfahrung schließen wir auf die Richtigkeit der dieser Theorie zugrunde liegenden Anschauungen. Dann können wir etwas Näheres über die Schichten im Kontaktraum aussagen. Nach Formel (6) ist

$$(13) \quad V = \delta \cdot F_k + k_8 \sigma_1 \delta_1 (\delta + \delta_2) + k_8 \sigma_2 \delta_2^2,$$

wenn wir $\delta_1 + \delta_2 = \delta$ setzen. Den Kontaktabstand δ wollen wir als konstant ansehen. Ohne Raumladung ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 0$) wäre nach (13)

$$(14) \quad V_1 = \delta \cdot F_k.$$

Nun gehört zu jedem Strom J ein bestimmtes F_k . Demnach gehört auch nach (14) zu jedem J ein bestimmtes V_1 und nach (13) ein bestimmtes V und die Differenz

$$(15) \quad v = V - V_1 = k_8 \sigma_1 \delta_1 (\delta + \delta_2) + k_8 \sigma_2 \delta_2^2$$

gibt direkt den Einfluß der Raumladung bei jedem Stromwert wieder.

Zwei Grenzfälle sind denkbar. Entweder befindet sich die ganze Raumladung an der Kathode, dann ist $\sigma_2 = 0$ und wegen (2) und (15)

$$(16) \quad v' = k_8 S (\delta + \delta_2).$$

Die Differenz der Spannungen ist hier am größten. Oder der Raum an der Kathode ist von Ladung frei, dann ist $\sigma_1 = 0$ und

$$(17) \quad v'' = k_8 S \delta_2.$$

Die Differenz der Spannungen ist hier am kleinsten. Aus (16) und (17) ergibt sich das Verhältnis der beiden Spannungsdifferenzen zu

$$(18) \quad \frac{v'}{v''} = 1 + \frac{\delta}{\delta_2}.$$

Aus den Figg. 6 und 7 können wir zu jedem J die zugehörigen V - (Kurve 2 in Fig. 7) und V_1 -Werte (Kurve 1 in Fig. 7 oder besser die Kurve in Fig. 6) entnehmen. Die Differenz $v = V - V_1$ ist bei etwa $J = 1$ am größten, nämlich $v' = 149,3$; bei $J = 67$ schon recht klein, nämlich $v'' = 5,8$. So folgt aus der Erfahrung

$$\frac{v'}{v''} = \frac{149,3}{5,8} \sim 26$$

und daher aus (18)

$$(19) \quad \delta_2 = \frac{\delta}{25}.$$

Die Rechnung liefert hiernach folgendes Bild: In Ruhe und bei geringem Strom ist der Kontaktraum praktisch homogen von geladenen Gasteilchen erfüllt. Mit wachsendem Strom werden die geladenen Gasteilchen an die Anode gedrängt, wo sie sich schließlich alle in einer dünnen Schicht, die höchstens $1/25$ des gesamten Kontaktabstandes beträgt, konzentrieren.

Einer homogenen Verteilung der geladenen Gasteilchen ist nun, wie man sich durch Rechnung überzeugt, in ihrer Wirkung auf die Spannung V eine vollkommen unhomogene Verteilung dann gleichwertig, wenn die unhomogene Verteilung symmetrisch zur Mitte des Kontaktraumes erfolgt. Hiernach sieht das Bild so aus: In Ruhe und bei geringem Strom sind die

geladenen Gasteilchen gleichmäßig auf die beiden Elektroden verteilt und die meisten haften an diesen. Mit wachsendem Strom wird die dichte und geladene Gasschicht, welche die Kathode bedeckt, abgehoben und möglichst dicht an die Anode gedrückt. Dieses Bild allein entspricht den Anschauungen, wie sie der Theorie zugrunde gelegt sind und wie sie sich dort bewährt haben.

Zur Vervollständigung des Bildes ist noch zu erwähnen, daß sich die Ergebnisse grundsätzlich nicht ändern, wenn statt der unstetigen Verteilung eine stetige Verteilung der Dichte im Kontaktraum angenommen wird.

Welcher Art sind nun die Kräfte, welche die geladenen Gasteilchen an die Elektroden binden?

Die Kräfte könnten vom Material der Elektrode ausgehen. Dann könnte es bei sehr verschiedenem Material der beiden Elektroden vorkommen, daß die geladenen Gasteilchen in der Hauptzahl an der einen Elektrode sitzen, während die andere Elektrode von geladenen Gasteilchen fast völlig entblößt ist. Und das würde ungezwungen erklären, wenn bei einem Kontakt in der einen Polung eine fallende Charakteristik beobachtet werden würde, in der anderen Polung aber eine fallende Charakteristik kaum wahrnehmbar wäre. Denn es ist klar, daß eine bessere fallende Charakteristik zustande kommen muß, wenn diejenige Elektrode, die vorzüglich mit geladenen Gasteilchen bedeckt ist, zur Kathode gemacht wird. Die Unterschiede müßten am größten sein an der Spitze der Charakteristiken und sich allmählich nach beiden Seiten hin verlieren.

Nun sind im allgemeinen die Unterschiede zwischen den beiden Polungen gering.¹⁾ Auch bei dem besonderen Kontakt dieser Arbeit machten sich bei vorsichtiger Einstellung der Spitze der Charakteristik Unterschiede in der Polung kaum bemerkbar.²⁾ Das ist gewiß seltsam bei so verschiedenem

1) Vgl. hierüber z. B. die Figg. 7 und 8 in der Arbeit von Lossev (Radio News) oder die Fig. 4 in der Arbeit von Sixtus.

2) Dieser Polungseffekt hat mit dem auf S. 10 beschriebenen nichts zu tun. Die Raumladung ändert sich sehr träge und um so mehr, je stärker der Strom ist. Bei der Abtastung der Spitze der Charakteristik aber ist der Strom noch sehr gering. Die beiden Effekte stören sich nicht, wenn man rasch genug umpolt. Sie können so bequem auseinander gehalten werden.

Material der Elektroden wie Eisen und der eingangs erwähnten Schmelze. Auch wenn an Stelle des Eisens so unterschiedliche Stoffe wie Gold, Kupfer, Platin, Graphit gesetzt wurden, zeigten sich nur Schwankungen der Spitze der Charakteristik innerhalb der Fehlergrenze. So muß der Schluß gezogen werden, daß im allgemeinen die geladenen Gasteilchen nicht auf Grund einer spezifischen Eigenschaft des Materials an die Elektroden gefesselt werden, sondern auf Grund einer allen Elektroden gemeinsamen Eigentümlichkeit dort gebunden werden. Zieht man als solche gemeinsame Eigentümlichkeit die elektrische Leitfähigkeit der Elektroden in Betracht, so kommt man zu dem Ergebnis, daß es Bildkräfte sind, welche die geladenen Gasteilchen sich in der leitenden Elektrode spiegeln lassen und sie dadurch an die Elektrode binden.

Unter diesen Umständen erscheint das Material der Elektrode für die fallende Charakteristik unwesentlich. Jeder Kontakt aus beliebigen Elektroden sollte den Effekt zeigen. Wenn dem nicht so ist, so kann es nur daran liegen, daß nur wenige bestimmte Kontakte zwischen sich die erforderliche Luftmenge zu saugen und dieselbe aufzuladen vermögen, die meisten anderen aber diese Fähigkeiten nicht besitzen. Hiermit wird unsere Aufmerksamkeit auf die Eigentümlichkeit mancher Elektroden gelenkt, das neutrale, elektrisch ungeladene Gas zu adsorbieren.

Die Adsorptionerscheinungen wurden in der Weise untersucht, daß bei einer an sich wirksamen Kontaktstelle sowohl die geladenen wie die ungeladenen Gasteilchen entfernt wurden und nunmehr bei verschiedenen Kontaktdrucken die Zeit beobachtet wurde, bis die fallende Charakteristik wieder auftrat.

Die geladenen Gasteilchen aus dem Kontaktraum zu entfernen, ist sehr schwierig. Mit Hilfe eines verstärkten Kontaktdruckes ist da wenig auszurichten. Jedes geladene Gasteilchen, das den Kontaktraum verläßt, erzeugt ein elektrisches Feld, das alle folgenden geladenen Gasteilchen energisch in den Kontaktraum zurücktreibt. So erklärt es sich auch, daß, wenn erst einmal die Gasteilchen geladen sind und es bleiben, ganz enorme Kontaktdrucke ausgeübt werden können, ohne daß die fallende Charakteristik verschwindet. So konnte bei einem Versuch mit unserem Kontakt bei negativer Polung der Eisen Elektrode die Belastung der Eisenspitze, die einen

Durchmesser von etwa 0,2 mm hatte, ohne Schaden für die Charakteristik bis auf 50 g gesteigert werden. Um die geladenen Gasteilchen zu entfernen, blieb nichts anderes übrig, als sie erst — wie auf S. 10 beschrieben — bei positiver Polung der Eisenelektrode zu neutralisieren. Dann genügte ein kurzer aber heftiger Stromstoß, um die neutralen Gasteilchen aus dem Kontaktraum in die freie Luft zu befördern. Die aperiodischen Entladungen eines Kondensators eigneten sich hierfür besonders. Sie hatten den Vorteil, zuweilen durch einen Funken auch auf die geladenen Gasteilchen einzuwirken. Der Funke bedeutete hier offenbar nichts anderes als die gewaltsame und schnelle Neutralisierung derjenigen geladenen Gasteilchen, die sich bis dahin auf dem legalen Wege noch nicht neutralisiert hatten. Deshalb wirkten aperiodische Entladungen manchmal auch dann, wenn die Eisenelektrode negativ gepolt war.

Ein auf solche Weise unwirksam gemachter Kontakt zeigte bei einem Kontaktdruck von 7 g keine fallende Charakteristik mehr, auch nicht nach längerer Strombehandlung, auch nicht bei Umpolung. Nach 10 Stunden Ruhe und Stromlosigkeit war immer noch keine fallende Charakteristik am Kontakt zu bemerken. Erst nach 22 Stunden Ruhe und Stromlosigkeit hatte sich der Kontakt so weit erholt (war so viel Luft in den Kontakt zurückdiffundiert), daß eine fallende Charakteristik bei negativer Polung der Eisenelektrode deutlich wurde. In den nächsten Stunden erlangte dann der Kontakt die ursprüngliche Wirksamkeit wieder. Bei einer Belastung von 1 g spielten sich die Ereignisse viel schneller, in etwa 4—8 Stunden, ab. Rasch erholte sich der Kontakt, wenn er bei 7 g Belastung unwirksam gemacht und dann bis auf 0,5 g entlastet wurde.

Das alles ist typisch für Diffusionsvorgänge. Überläßt man einen unwirksam gemachten Kontakt sich selbst, so kann man ganz allgemein durch Stichproben — Messung der Spannung bei bestimmt gewähltem kleinen Strom — am Steigen der Spannung die Fortschritte der Diffusion mit der Zeit verfolgen. Eine Diffusion der Luft von außen in den Kontaktraum kann bei solchen Kontaktdrucken kaum stattfinden, ohne daß wenigstens die eine Elektrode auf die neutralen Gasteilchen beträchtliche Adsorptionskräfte ausübt. Diese Kraft können wir weniger der Eisenelektrode als vielmehr der Gegenelektrode beilegen, die hier — wie beschrieben — aus einer

Schmelze von hauptsächlich Zinkoxyd mit einem geringen Zusatz von Kupferoxyd besteht. Und jetzt wird es klar, welche Rolle der geringe Zusatz von Kupferoxyd spielt. Das Kupferoxyd dient hier zum Freimachen der Adsorptionskräfte des Zinkoxyds, die sich sonst in dem kompakten Zinkoxyd gegenseitig binden und daher im reinen und kompakten Zinkoxyd nach außen wenig in Erscheinung treten. Wenn dem so ist, dann bietet sich uns sofort ein anderer Weg, um die Adsorptionskräfte des Zinkoxyds freizumachen und damit wirksame Kontakte zu schaffen: wir brauchen nur das Zinkoxyd aufzulockern, in möglichst dünner Schicht auf einer chemisch neutralen Unterlage niederzuschlagen. Ein Graphitstab wurde in eine konzentrierte Lösung von Zinknitrat getaucht und getrocknet, so daß sich eine dünne Haut von Zinknitrat bildete. Der Stab wurde dann mit seiner Haut vorsichtig auf Rotglut erhitzt. Das Nitrat zersetzte sich dabei und ein dünner Überzug von reinem Zinkoxyd blieb auf dem Graphitstift zurück. Diese Zinkoxydelektrode gab im Kontakt mit einem Eisendraht (negativer Pol) an *allen* untersuchten Stellen eine gute fallende Charakteristik!

Eine kompakte Zinkoxydelektrode dagegen, die aus gepreßtem reinen Zinkoxyd durch Sintern bei 1450° hergestellt war, war praktisch unwirksam und unbrauchbar.

So ergibt sich das vollständige Bild für das Zustandekommen der fallenden Charakteristik bei Kontakten.

Zusammenfassung

1. Bestimmte Metalloxyde vermögen unter den angegebenen Umständen Luft im Kontakt zu adsorbieren.

2. Die Luftteilchen eignen sich unter entschiedener Mitwirkung der Elektroden aus dem Elektronenstrom Elektronen an. Es entsteht im Kontaktraum eine Raumladung, die sich hauptsächlich in dünnen Schichten an den Elektroden konzentriert.

3. Beim Stromfluß wird die an der Kathode haftende Schicht von geladenen Gasteilchen infolge der an der Kathode herrschenden und auch den Elektronenstrom bestimmenden Feldstärke abgehoben und zur Anode hinübergedrückt. Infolge dieser Umgruppierung der geladenen Gasteilchen kann

ein größerer Elektronenstrom bei kleinerer Spannung fließen: die Charakteristik wird fallend.

Die gewonnenen Resultate erscheinen in zweierlei Hinsicht bemerkenswert. Sie geben dem Physiker eine Grundlage, die Adsorptionskräfte und die adsorbierten Mengen messend zu verfolgen. Sie geben dem Techniker die Möglichkeit, einen negativen Widerstand zusammenzubauen, der den Ansprüchen der Praxis genügt und der befähigt ist, sich manches Anwendungsgebiet zu erobern. Wie der negative Widerstand technisch am zweckmäßigsten gestaltet wird, darüber soll in einer weiteren Arbeit berichtet werden.

(Eingegangen 8. Februar 1931)

Zur Theorie der Resonanzfluoreszenz

Von Viktor Weisskopf

(Göttinger Dissertation)

I. Einleitung

Die Diracsche Theorie der Wechselwirkung zwischen Licht und Materie, ist, wie im folgenden gezeigt werden soll, imstande, die Polarisation und Intensitätsverteilung der Resonanzfluoreszenz über die verschiedenen Frequenzen und Raumrichtungen wiederzugeben. Sie ist der gewöhnlichen Störungstheorie, die das einfallende Licht als ein störendes periodisches Wechselfeld betrachtet, überlegen, denn diese liefert wohl allgemeine Aussagen über Intensität und Polarisation des Resonanzlichtes, sie läßt aber keine Schlüsse über die Intensitätsverteilung innerhalb der Resonanzlinie, über die Übergangsbereiche zwischen Entartung und Nichtentartung zu, also über alle jene Fragen, die mit der Linienbreite und der Strahlungsdämpfung zusammenhängen.

Wir stellen kurz die wesentlichen Ergebnisse der folgenden Rechnungen zusammen:

1. Die vom Atom ausgestrahlte Resonanzstrahlung stimmt mit dem eingestrahnten Licht in der Frequenz praktisch genau überein. Ist z. B. das eingestrahlte Licht in der Frequenz schmaler als die natürliche Linienbreite der Resonanzlinie, so wird das Resonanzlicht nicht breiter sein. Hierbei wurde natürlich angenommen, daß außer dem eingestrahnten Licht keine weiteren Störungen auf das Atom einwirken. In Wirklichkeit ist das aber nie der Fall. Die tatsächlich beobachtete Resonanzstrahlung wird vor allem durch den Dopplereffekt und durch die Stoßdämpfung wesentlich verbreitert. Das Resultat hat nur insofern theoretisches Interesse, als es die Vorstellung verwirft, daß die Resonanzfluoreszenz eine unabhängige Aufeinanderfolge von Absorption und spontaner Emission sei.

In diesem Falle müßte ja, unabhängig von der Art der Einstrahlung, die Ausstrahlung natürliche Linienbreite haben. Dieser Punkt wird also durch die klassische Vorstellung richtig wiedergegeben, nach der die erzwungene Schwingung eines Oszillators mit der erzwingenden Kraft in der Frequenz genau übereinstimmt.

2. Es wird die natürliche Linienbreite der Absorptionslinie berechnet. Daß diese etwas breiter als die spontane Emissionslinie ist, folgt schon klassisch aus der durch die Strahlung vergrößerten Dämpfung des Oszillators. Dies ließe sich quantentheoretisch folgendermaßen umdeuten: Die vorhandene Strahlung verkürzt die Lebensdauer des angeregten Zustandes, woraus korrespondenzmäßig (oder nach der Heisenberg-Relation) eine vergrößerte Unschärfe, also eine Verbreiterung des Niveaus folgt. Die Verbreiterung ist aber noch größer, als diese Annahme rechtfertigen würde. Es muß nämlich konsequent angenommen werden, daß auch der Grundzustand des Atoms, der im strahlungsfreien Raum unendlich lange Lebensdauer hat, bei Vorhandensein von Strahlung nur endliche Zeit existiert und dadurch eine entsprechende Verbreiterung erleidet, die zur Linienbreite hinzutritt. Sie ist übrigens genau so groß, wie die Zusatzbreite des oberen Niveaus; diese wird durch die erzwungene Emission, jene durch die Absorption hervorgerufen.

3. Es wird gezeigt, wie die Resonanzfluoreszenz in die Rayleighsche Streuung (Dispersion) übergeht, wenn das einfallende monochromatische Licht von der Resonanzfrequenz abrückt. Die Verhältnisse sind genau dieselben, wie in der klassischen Theorie. Die Dispersionsformel hat ein Dämpfungsglied, das erst in der Nähe der Resonanz zur Geltung kommt. Das Dämpfungsglied ist proportional zur Übergangswahrscheinlichkeit der betreffenden Resonanzlinie.

4. Aus den Rechnungen folgt zwanglos die Heisenbergsche Regel über die Richtungsverteilung und Polarisation des Resonanzlichtes bei Richtungsentartung. Dies leistet zwar schon die Störungstheorie mit einem periodischen Wechselfeld; jedoch kann diese nicht den Übergang zwischen Entartung und Aufspaltung wiedergeben, der sich in folgender Erscheinung äußert:

5. Wird die freie Drehbarkeit des Atoms durch ein schwaches Magnetfeld aufgehoben, so tritt z. B. bei Quecksilberresonanzfluoreszenz Depolarisation und Drehung der Polarisationssebene ein.¹⁾ Die Drehung ist für kleine Magnetfelder proportional Δ/γ , wobei Δ die Larmorfrequenz, γ die Übergangswahrscheinlichkeit aus dem angeregten in den Grundzustand ist. Hanle versucht die Erscheinung zu erklären, indem er annimmt, der Oszillator sende das Resonanzlicht spontan aus, wobei die Schwingungsrichtung durch das Magnetfeld in Larmorfrequenz gedreht wird. Ist die Larmorfrequenz kleiner als die Abklingungszeit, so ist die Drehung nur über einen kleineren Winkel möglich und verursacht dadurch eine scheinbare Drehung der Polarisationssebene.

Dieser Erklärung liegt aber die Annahme zugrunde, daß Absorption und Reemission unabhängig aufeinanderfolgen, so daß man die Ausstrahlung der Resonanzfluoreszenz als spontane Emission auffassen darf. Daß dieses Bild nicht ausreicht, zeigt das Ergebnis

5a. Die Drehung der Polarisationssebene bei schwachen Magnetfeldern ist um so kleiner, je weiter das eingestrahlte Licht von der Resonanzfrequenz entfernt ist. Sie verschwindet, wenn diese Entfernung groß gegen die Linienbreite ist, also wenn die Resonanzfluoreszenz in die Rayleighsche Streuung (Dispersion) übergegangen ist. Wenn man am Hanleschen Bild festhalten will, müßte man annehmen, daß die Wirkung der Verweilzeit scheinbar verschwindet, wenn man von der Resonanzfluoreszenz zur Dispersion übergeht. Die genaue klassische Behandlung eines isotropen gedämpften Oszillators in einem schwachen Magnetfeld unter Einwirkung einer Lichtwelle, liefert jedoch auch die in 5. und 5a. geschilderten Erscheinungen.

6. Das ausgestrahlte Resonanzlicht steht in einer festen Phasenbeziehung zum eingestrahnten Licht. Da diese Phasenbeziehung an sich nicht beobachtbar ist, wird die Behauptung

1) W. Hanle, *Ztschr. f. Phys.* **30**. S. 39. 1924. Das Problem wurde quantenmechanisch schon von R. Oppenheimer, *Ztschr. f. Phys.* **43**. S. 27. 1927, behandelt. Jedoch rechnet R. Oppenheimer bloß die Polarisationsverhältnisse bei spontaner Emission im schwachen Magnetfeld vom angeregten Niveau aus. Daß es aber in gewissen Fällen stark auf die Art der Anregung ankommt, zeigt Punkt 5a.

bewiesen, indem gezeigt wird, daß das Resonanzlicht, welches von mehreren gleichartigen voneinander unabhängigen Atomen herührt, interferenzfähig ist und gerade solche Interferenzen zeigt, die auf eine gleiche Phasenbeziehung bei allen Atomen schließen läßt.

Um die Unabhängigkeit der Atome zu garantieren, müssen die Abstände zwischen diesen groß gegen die Wellenlänge ihres Lichtes sein.

7. Sind die Entfernungen der Atome mit der Wellenlänge des Resonanzlichtes vergleichbar, tritt eine Kopplung zwischen ihnen ein, die durch das gemeinsame Strahlungsfeld bedingt ist. Sie ist das Analogon zur klassischen Kopplung benachbarter strahlender Oszillatoren. Man kann dann nicht mehr annehmen, daß eines der Atome durch ein Lichtquant angeregt wird. Es können durch das Lichtquant nur Zustände des Gesamtsystems aller Atome angeregt werden, an denen gewissermaßen jedes Atom „beteiligt“ ist.

8. In zwei Fällen hat diese Kopplung auch bei stark benachbarten Atomen keinen Einfluß auf die Resonanzstrahlung. Einmal, wenn die eingestrahlte Frequenz nicht genau mit der Resonanzfrequenz übereinstimmt, also auf dem Übergangsgebiet zur Dispersion. Dies entspricht ganz dem klassischen Bild; der Oszillator wird in seiner Schwingung nicht gestört, wenn das von seinen Nachbarn zugestrahlte Licht mit seiner Eigenfrequenz nicht übereinstimmt. Ferner dann, wenn die Atome so dicht gelagert sind, daß eine große Anzahl auf einen Wellenlängenkubus fällt. Die gegenseitigen Störungen kompensieren sich dann und die einzelnen Atome strahlen in fester Phasenbeziehung zum einfallenden Licht, als ob sie unabhängig voneinander wären. Auf diese Weise entsteht die von Wood¹⁾ beobachtete selektive Reflexion der Resonanzfrequenz an Quecksilberdampf von hoher Dichte.

II. Beschreibung der Methode

Die Diracsche Theorie der Wechselwirkung zwischen Materie und Strahlung betrachtet das Atom und den umgebenden Strahlungsraum als ein quantenmechanisches System, dessen Hamiltonfunktion

$$H_{\text{Atom}} + H_{\text{Strahlung}} + H$$

1) R. W. Wood, Phys. Ztschr. 10. S. 425. 1909; u. a. m. vgl. Anm. 1 auf S. 64.

ist. H ist die Wechselwirkungsenergie zwischen Atom und Strahlung, die als kleine Störung betrachtet wird. Das Eigenwertspektrum des ungestörten Systems wird durch einschränkende Grenz- oder Periodizitätsbedingungen in bekannter Weise diskret gemacht. Seine stationären Zustände sind dann durch (X, s) gegeben, wobei X ein Atomniveau ist und s den Strahlungszustand angibt, indem es eine Zahlenreihe $n_1, n_2 \dots n_e \dots$ symbolisiert, die die Anzahl der vorhandenen Quanten der Art und Frequenz ϱ angeben.¹⁾ Die Wahrscheinlichkeit eines solchen Zustandes: $|a_{Xs}|^2$, ist bei vorhandener Wechselwirkung eine Funktion der Zeit. Sie ist bestimmt durch die Differentialgleichungen:

$$(1) \quad \frac{\hbar}{2\pi i} \dot{a}_{Xs} = \sum_{X's'} H(Xs, X's') a_{X's'} + E(Xs) a_{Xs},$$

wobei $E(Xs)$ die Energie des ungestörten Zustandes (Xs) ist. $H(Xs, X's')$ sind die Matricelemente der Wechselwirkungsenergie H .

Die Gl. (1) sind ein System homogener Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Lösung ist durch eine festgelegte Anfangsbedingung für $t = 0$ bestimmt. Wenn z. B. zur Zeit $t = 0$, der Zustand $(X, 0)$ — Atom im Zustand X , keine Strahlung vorhanden — realisiert ist, so lautet die Anfangsbedingung: $a_{X,0} = 1$, alle anderen $a = 0$. Wir erwarten dann ein exponentielles Abklingen dieses Zustandes und ein Ansteigen der Größen $a_{X's}$, wobei in s ein, zwei ... Lichtquanten vorhanden sind, je nachdem X' in ein, zwei ... Sprüngen von X aus erreichbar ist. Daß dies tatsächlich eine Lösung von (1) ist, wurde von Weisskopf und Wigner²⁾ gezeigt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die Endzustände ergab die Intensitätsverteilung in den Spektrallinien.

In den folgenden Rechnungen wird als Anfangszustand (A, s) angenommen, wobei A das Grundniveau des Atoms ist und die Strahlung s eine Resonanzfrequenz des Atoms enthält. Wir erwarten dann wieder ein exponentielles Abklingen von a_{Xs} bis zu Null durch Absorption der Resonanzfrequenz.

1) Der Index ϱ gibt die Frequenz, die Richtung und den Polarisationszustand des Lichtquants an.

2) V. Weisskopf u. E. Wigner, Ztschr. f. Phys. **63**, S. 54. 1930 im folgenden mit a. a. O. zitiert.

Der Zustand geht nach Absorption und Reemission eines Lichtquants in (A, s') über, wobei sich s' von s dadurch unterscheidet, daß ein Lichtquant der Art ρ sich in eines der Art σ umgewandelt hat. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung über die ρ und σ ergibt dann die Intensitäts- und Polarisationsverteilung im Resonanzlicht und ihre Beziehung zu den Eigenschaften des eingestrahnten Lichtes wieder.

Führt man die Rechnungen exakt unter Berücksichtigung sämtlicher möglichen Zustände durch, so divergieren die Gleichungen (1), wie Oppenheimer und Waller¹⁾ gezeigt haben. Wir werden daher wie a. a. O. in der Rechnung bloß jene Zustände berücksichtigen, die vom Anfangszustand energetisch nicht weit entfernt sind. Tatsächlich werden ja auch nur solche Zustände erreicht, deren Energie innerhalb der Linienbreite mit dem Anfangszustand übereinstimmt. Wir setzen die Wahrscheinlichkeit der anderen Zustände (der „abnormen Übergänge“) gleich Null, wodurch allerdings die durch die Wechselwirkung verursachten Termverschiebungen wegfallen, die bei der exakten Rechnung unendlich werden.

Wir werden im folgenden nicht wie Dirac das Strahlungsfeld in einem Hohlraum mit spiegelnden Wänden einschließen, sondern periodische Grenzbedingungen einführen, um ebene fortschreitende Wellen darstellen zu können. Um Aussagen über Kohärenz der Strahlung zu erhalten, ist es außerdem erforderlich, den Ort des Atoms im Raum genau festzulegen und nicht wie Dirac über alle Lagen zu mitteln. Es ist daher notwendig, in den nächsten Abschnitten die Quantelung der Strahlung und die Berechnung der Wechselwirkungsenergie ausführlicher vorzunehmen, da wir die Matricelemente von H nicht direkt von Dirac übernehmen können.

III. Quantelung des Strahlungsfeldes

Um ein diskretes Eigenwertspektrum des Strahlungsfeldes zu erzwingen, nehmen wir an den Flächen eines Würfels mit der Kantenlänge L periodische Grenzbedingungen an. Der elektrische Zustand auf einer Würfelfläche soll stets derselbe sein wie auf der gegenüberliegenden.

1) R. Oppenheimer, Phys. Rev. **35**. S. 461. 1930. — I. Waller, Ztschr. f. Phys. **62**. S. 673. 1930.

Man kann ein Vektorpotential \mathfrak{A} einführen, so daß auf Grund der Maxwell'schen Gleichungen gilt:

$$(2) \quad \begin{cases} E = \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{A}} & , & \Delta \mathfrak{A} = \frac{1}{c^2} \ddot{\mathfrak{A}} & , \\ \mathfrak{H} = \text{rot } \mathfrak{A} & , & \text{div } \mathfrak{A} = 0 & . \end{cases}$$

Der Grenzbedingung wird genügt durch den Ansatz:

$$(3) \quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \sum_k \mathfrak{A}_k^{(1)} \cos(k_1 x + k_2 y + k_3 z) & k_1 = 0 \dots \dots \infty & , \\ & k_2 = -\infty \dots \dots \infty & , \\ & k_3 = -\infty \dots \dots \infty & . \\ + \sum_k \mathfrak{A}_k^{(2)} \sin(k_1 x + k_2 y + k_3 z) \end{cases}$$

(k bedeutet eine Indexkombination k_1, k_2, k_3 . Es ist bloß über jene Tripel zu summieren, deren Vektor \mathfrak{f} eine positive x -Komponente hat.) Der Ansatz erfüllt auch (2), wenn $\mathfrak{A}_k^{(1)}$ und $\mathfrak{A}_k^{(2)}$ senkrecht auf dem Vektor \mathfrak{f} mit den Komponenten k_1, k_2, k_3 stehen. Es ist also

$$(4) \quad \mathfrak{A}_k^{(i)} = Q_{k1}^{(i)} \mathfrak{e}_1 + Q_{k2}^{(i)} \mathfrak{e}_2 \quad i = 1, 2,$$

wobei \mathfrak{e}_1 und \mathfrak{e}_2 zwei aufeinander senkrechte Einheitsvektoren sind, deren Ebene senkrecht zu \mathfrak{f} steht. Ihre sonstige Lage ist beliebig, aber wir setzen von vornherein fest, daß die Lage dieser Vektoren im Raume nur eine Funktion der Richtung des Strahlvektors

$$(5) \quad \mathfrak{S}_k = \frac{\mathfrak{f}}{|\mathfrak{f}|}$$

sein soll und nicht von $|\mathfrak{f}|$ abhängen soll. Die Energie des Würfels mit dem Volumen $V = L^3$

$$(6) \quad \begin{cases} H = \frac{1}{8\pi} \int_V (E^2 + \mathfrak{H}^2) dx dy dz \\ = \frac{1}{8\pi} \int_V \left\{ \frac{1}{c^2} \dot{\mathfrak{A}}^2 + (\text{rot } \mathfrak{A})^2 \right\} dx dy dz \end{cases}$$

wird nach Einsetzen von (4) in (3) und (3) in (6):

$$H = \frac{V}{16\pi c^2} \sum_k \sum_{i,j=1,2} \{ (\dot{Q}_{kj}^{(i)})^2 + 4\pi^2 v_k^2 (Q_{kj}^{(i)})^2 \},$$

wobei

$$(6a) \quad v_k = \frac{c}{L} |\mathfrak{f}|.$$

Setzen wir

$$(7) \quad \mu = \frac{V}{8\pi c^2} \quad \text{und} \quad P_{kj}^{(i)} = \mu \dot{Q}_{kj}^{(i)},$$

so wird

$$(8) \quad H = \frac{1}{2} \sum_k \sum_{i,j} \left\{ \frac{(P_{kj}^{(i)})^2}{\mu} + 4\pi v_k^2 \mu (Q_{kj}^{(i)})^2 \right\}.$$

Dies ist aber die Hamiltonfunktion eines Systems unendlich vieler Oszillatoren mit den Koordinaten $Q_{kj}^{(i)}$ und den Impulsen $P_{kj}^{(i)}$. Mithin können wir das Strahlungsfeld als ein solches System betrachten. Aus der Hamiltonfunktion (8) folgen sofort die Bewegungsgleichungen für die $Q_{kj}^{(i)}$

$$(9) \quad \ddot{Q}_{kj}^{(i)} + 4\pi v_k^2 \mu Q_{kj}^{(i)} = 0.$$

die sich auch direkt aus (2) ergeben. Zu jeder Frequenz v_k gehören vier Oszillatoren mit den Koordinaten $Q_{kj}^{(i)}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$. Nach (3) stellen sie stehende Wellen der Frequenz v_k dar, bei denen sich im Koordinatenursprung für $i = 1$ ein Wellenbauch (cos — Grenzbedingung), für $i = 2$ ein Wellenknoten (sin — Grenzbedingung) befindet. Die Indizes $j = 1, 2$ geben die Polarisationsrichtungen parallel e_1 bzw. e_2 an.

Es ist günstiger, das Strahlungsfeld nicht in stehende sondern in fortschreitende Wellen zu zerlegen.

Zu diesem Zweck führen wir folgende neuen Koordinaten ein:

$$(10) \quad \begin{cases} q_{kj}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_{kj}^{(1)} - \frac{1}{2\pi v_k \mu} P_{kj}^{(2)} \right), \\ q_{kj}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(Q_{kj}^{(1)} + \frac{1}{2\pi v_k \mu} P_{kj}^{(2)} \right), \\ p_{kj}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(P_{kj}^{(1)} + 2\pi v_k \mu Q_{kj}^{(2)} \right), \\ p_{kj}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(P_{kj}^{(1)} - 2\pi v_k \mu Q_{kj}^{(2)} \right). \end{cases}$$

Die Hamiltonfunktion hat, wie man sich leicht überzeugt, in den neuen Koordinaten dieselbe Form:

$$(11) \quad H = \frac{1}{2} \sum_2 \left(\frac{p_e^2}{\mu} + 4\pi^2 v_e^2 \mu q_e^2 \right).$$

Wir benutzen hier wie im folgenden neben der detaillierten Indizierung $q_{kj}^{(i)}$ auch die einfache q_e , die die verschiedenen i und j nicht speziell hervorhebt, sondern die Oszillatoren und ihre Koordinaten in der Reihenfolge wachsender Frequenzen einfach durchnumeriert. Wir verwenden hierfür stets griechische Indizes.

(11) ist wieder eine Hamiltonfunktion eines Systems unendlich vieler Oszillatoren, die aber nun fortschreitende Wellen darstellen. Um dies einzusehen, setzen wir alle $q_e = 0$ bis auf eines, nämlich $q_{kj}^{(1)}$. Aus $q_{kj}^{(2)} = 0$ folgt nach (10)

$$Q_{kj}^{(1)} = -\frac{1}{2\pi\nu_k\mu} P_{kj}^{(2)} = \frac{1}{2\pi\nu_k} \dot{Q}_{kj}^{(2)}.$$

$Q_{kj}^{(1)}$ befolgt (9) und hat daher die Form $A \cos 2\pi(\nu_k t + \delta)$, woraus aber nun $Q_{kj}^{(2)} = A \sin 2\pi(\nu_k t + \delta)$ folgt. Setzen wir $Q_{kj}^{(1)}$ und $Q_{kj}^{(2)}$ in (3) ein — alle anderen $Q_{kj}^{(i)}$ sind gleich Null — so erhalten wir

$$\mathfrak{H} = \epsilon_j \cdot A \cos 2\pi \left(\nu_k t + \frac{k_1 x + k_2 y + k_3 z}{L} + \delta \right).$$

Der Oszillator mit der Koordinate $q_{kj}^{(1)}$ stellt also eine ebene fortschreitende Welle in der Richtung \mathbf{k} mit der Polarisation ϵ_j dar. Entsprechend sieht man, daß die Koordinate $q_{kj}^{(2)}$ die fortschreitende Welle in der entgegengesetzten Richtung beschreibt.¹⁾

Die Quantelung des Strahlungsfeldes wird durchgeführt, indem man die einzelnen Oszillatoren quantelt. Die stationären Zustände s des Feldes sind dann durch Angabe der Quantenzahlen $n_{kj}^{(i)}$ oder kurz n_e der einzelnen Oszillatoren festgelegt. Die Eigenwerte des Systems sind aber wegen der Nullpunktsenergie unendlich. Wir können aber diese Schwierigkeit umgehen, indem wir z. B. die Energie des strahlungslosen Zustandes auf Null normieren. Wir erhalten dann:

$$E(n_1 \dots n_e \dots) = \sum_e \hbar \nu_e n_e.$$

1) Der kanonischen Transformation (9) entspräche quantenmechanisch eine unitäre Transformation, die die Energie H ungeändert läßt, was möglich ist, da jeder Eigenwert ν_k vierfach entartet ist. Diese Entartung wird benutzt, um neben der Energie auch noch den Impuls der Lichtwelle auf Hauptachsen zu bringen.

Die Matricelemente der Koordinaten q_e sind

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} q_e(s, s') &= \sqrt{\frac{\hbar(n_e + 1)}{8\pi^2 \mu \nu_e}} e^{i\varphi_e}, \\ &\quad \text{wenn in } s \text{ und } s' \text{ alle } n_\sigma = n_\sigma' \text{ bis auf } \sigma = e, \\ &\quad \text{und } n_e = n_e' - 1, \\ &= \sqrt{\frac{\hbar n_e}{8\pi^2 \mu \nu_e}} e^{i\varphi_e}, \\ &\quad \text{wenn alle } n_\sigma = n_\sigma' \text{ f\"ur } \sigma \neq e \text{ und } n_e = n_e' + 1, \\ &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned} \right.$$

Die Matricelemente von p_e sind dieselben, multipliziert mit dem Faktor $2\pi i \nu_e \mu$.

Wenn man das Volumen des periodischen fortgesetzten Hohlraums über alle Grenzen wachsen läßt, rücken die Eigenwerte immer näher aneinander. Es gibt dann

$$(13) \quad \frac{8\pi}{c^3} V \nu^2 d\nu.$$

Oszillatoren, deren Frequenz ν innerhalb ν und $\nu + d\nu$ liegt. Der Zustand des Strahlungsfeldes ist dann durch die Strahlungsdichte $\bar{s}(\nu)$ als Funktion der Frequenz bestimmt, spezieller noch durch $s_j(\nu, \mathfrak{S}) d\nu dS$ der Strahlungsdichte in der Richtung \mathfrak{S} mit der Polarisationsrichtung e_j im Frequenzintervall $d\nu$ und Raumwinkelement dS . Diese Strahlungsdichten stehen mit den Besetzungszahlen der Oszillatoren in folgender Beziehung:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \bar{s}(\nu) d\nu &= \sum_{\substack{\nu_e = \nu \\ e}}^{\nu + d\nu} \hbar \nu_e n_e, \\ s_j(\nu, \mathfrak{S}) d\nu dS &= \sum_{\substack{\nu_k = \nu \\ \mathfrak{k} \in \mathfrak{S}}}^{\nu + d\nu} \hbar \nu_k n_{kj}^{(i)}, \quad \begin{array}{ll} + \mathfrak{S} & \text{für } i = 1, \\ - \mathfrak{S} & \text{für } i = 2. \end{array} \end{aligned} \right.$$

Die Bezeichnung der Summe bedeutet: Es ist über jene Wertetripel k_1, k_2, k_3 zu summieren, für die ν_k innerhalb ν und $\nu + d\nu$ liegt und deren Vektor \mathfrak{k} innerhalb des Raumwinkelementes dS in Richtung \mathfrak{S} liegt.

IV. Berechnung der Wechselwirkungsenergie

Wenn man annimmt, daß die betrachteten Wellenlängen groß gegen den Durchmesser des Atoms sind, darf man als Wechselwirkungsenergie zwischen Atom und Strahlung die

potentielle Energie der Elektronen im elektrischen Feld des Lichts nehmen¹⁾:

$$H = -\frac{e}{c} \sum_n (\mathbf{r}_n, E(x_n, y_n, z_n)) = -\frac{e}{c} \sum_n (\mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}_n)).$$

\mathbf{r}_n mit den Komponenten x_n, y_n, z_n ist der Ortsvektor des n -ten Elektrons im Atom. Wir zerlegen H nach den Eigenschwingungen des Strahlungsfeldes, indem wir (3) einsetzen:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} H = -\frac{e}{c} \sum_n \sum_k \left\{ (\mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{A}}_k^{(1)}(t)) \cos \frac{2\pi}{\lambda_k} (\mathbf{E}_k, \mathbf{r}_n) \right. \\ \left. + (\mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{A}}_k^{(2)}(t)) \sin \frac{2\pi}{\lambda_k} (\mathbf{E}_k, \mathbf{r}_n) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wir haben hier statt des Vektors \mathbf{t}/L nach (5) und (6a) den Vektor $\frac{\mathbf{E}_k}{\lambda_k}$ gesetzt, wo $\lambda_k = \frac{c}{\nu_k}$ ist. Wenn wir in (15) bloß jene Glieder betrachten, für die λ_k sehr groß gegen den Atomdurchmesser ist, so dürfen wir im Argument von sin und cos $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_0$ setzen, wo \mathbf{r}_0 der Koordinatenvektor des Atommittelpunktes ist:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} H = -\frac{e}{c} \sum_k \left\{ (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{A}}_k^{(1)}) \cos \frac{2\pi}{\lambda_k} (\mathbf{E}_k, \mathbf{r}_0) \right. \\ \left. + (\mathbf{r}, \dot{\mathbf{A}}_k^{(2)}) \sin \frac{2\pi}{\lambda_k} (\mathbf{E}_k, \mathbf{r}_0) \right\}. \end{aligned} \right. \quad \mathbf{r} = \sum_n \mathbf{r}_n$$

Um H in den von uns gewählten Koordinaten $q_{kj}^{(i)}$ zu schreiben, bilden wir die Umkehrungsformel von (10):

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} Q_{kj}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (q_{kj}^{(1)} + q_{kj}^{(2)}), & Q_{kj}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{p_{kj}^{(1)} - p_{kj}^{(2)}}{2\pi \nu_k \mu}, \\ P_{kj}^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{kj}^{(1)} + p_{kj}^{(2)}), & P_{kj}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} 2\pi \nu_k \mu (q_{kj}^{(2)} - q_{kj}^{(1)}) \end{aligned} \right.$$

und setzen diese in (16) mit Hilfe von (4) ein. So erhalten wir:

$$(18) \quad \left\{ \begin{aligned} H = -\frac{e}{c} \sum_k \sum_{j=1,2} (\mathbf{r}, \mathbf{e}_j) \left\{ (\dot{q}_{kj}^{(1)} + \dot{q}_{kj}^{(2)}) \cos \frac{2\pi}{\lambda_k} (\mathbf{E}_k, \mathbf{r}_0) \right. \\ \left. + \frac{1}{2\pi \nu_k \mu} (\dot{p}_{kj}^{(1)} - \dot{p}_{kj}^{(2)}) \sin \frac{2\pi}{\lambda_k} (\mathbf{E}_k, \mathbf{r}_0) \right\}. \end{aligned} \right.$$

1) Den exakten Beweis hierfür vgl. M. Göppert-Mayer, Ann. d. Phys. im Erscheinen.

Wir bilden nun die Matricelemente der Wechselwirkung H . Da $p_e(s, s') = 2\pi i \nu_e \mu q_e(s, s')$ ist, läßt sich das Matricelement von \hat{H} nach (18) folgendermaßen schreiben:

$$(19) \left\{ \begin{aligned} H(Xs; X's') &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e}{c} \sum_k \sum_j (\mathfrak{D}_{XX'} e_j) \\ &\cdot \left\{ q_{kj}^{(1)}(s, s') e + \frac{2\pi i}{\lambda_k} (\mathfrak{E}_k, r_0) + q_{kj}^{(2)}(s, s') e - \frac{2\pi i}{\lambda_k} (\mathfrak{E}_k, r_0) \right\}, \end{aligned} \right.$$

wobei $\mathfrak{D}_{XX'}$ das Koordinatenvektor-Matricelement des Atoms ist. Wegen der Eigenschaften (12) der Matricelemente $q_{kj}^{(1)}(s, s')$ wird ebenso

$$H(Xs, X's') = 0, \quad \text{außer wenn } n'_\sigma = n_\sigma \text{ für } \sigma \neq \varrho, \\ \text{und } n'_e = n_e \pm 1.$$

Die von Null verschiedenen Matricelemente bezeichnen wir mit $H(Xs, X's') = H(Xn_\sigma, X'n_\sigma \pm 1)$, wenn $n'_\sigma = n_\sigma$ für $\sigma \neq \varrho$, und $n'_e = n_e \pm 1$,

da sie nur von n_e und n'_e abhängen. Wenn wir (12) in (19) einsetzen, erhalten wir also nach Einführung der detaillierten Indizierung:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} &H(Xn, X'n_{kj}^{(i)} + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e}{c} e^{\pm \frac{2\pi i}{\lambda_k} (\mathfrak{E}_k, r_0)} (\mathfrak{D}_{XX'}, e_j) \sqrt{\frac{\hbar \nu_k (n_{kj}^{(i)} + 1)}{2\mu}} e^{i\varphi_{kj}^{(i)}}, \\ &H(Xn_{kj}^{(i)}, X'n_{kj}^{(i)} - 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e}{c} e^{\pm \frac{2\pi i}{\lambda_k} (\mathfrak{E}_k, r_0)} (\mathfrak{D}_{XX'}, e_j) \sqrt{\frac{\hbar \nu_k n_{kj}^{(i)}}{2\mu}} e^{i\varphi_{kj}^{(i)}}. \end{aligned} \right.$$

In Exponenten der e -Potenz gilt das obere Vorzeichen für $i = 1$, das untere für $i = 2$.¹⁾

Die Matricelemente (20) sind proportional $1/\sqrt{\mu}$ und gehen mit wachsendem V gegen Null. Wir bilden daher folgende für große V stetige Funktion von ν und der Raumrichtung \mathfrak{E} :

1) Man kann das doppelte Vorzeichen vermeiden, wenn man von vornherein, wie bei (14), für $i = 2$ den negativen Vektor \mathfrak{E}_k zuordnet. Durch (5) ist bloß die Richtung von \mathfrak{E}_k gegeben. $i = 1, 2$ stellen ja zwei entgegengesetzt laufende Wellen dar.

$$(21) \left\{ \begin{aligned} f_{XX'}^j(\pm \nu, \mathfrak{S}) d\nu dS &= \sum_{\substack{\nu+d\nu \\ \nu=\nu \\ \mathfrak{S}=\mathfrak{S}}}^{\nu+d\nu} \left| H(X n_{kj}^{(i)}, X' n_{kj}^{(i)} \pm 1) \right|^2 \\ &\quad \begin{aligned} i &= 1 \text{ für } +\mathfrak{S} \\ i &= 2 \text{ für } -\mathfrak{S} \end{aligned} \end{aligned} \right.$$

Diese Funktionen lassen sich mit Hilfe von (13) und (14) leicht ausrechnen:

$$(22) \left\{ \begin{aligned} f_{XX'}^j(+\nu, \mathfrak{S}) &= 2\pi e^2 \left| (\mathfrak{D}_{XX'}, \mathbf{e}_j) \right|^2 \left\{ s_j(\nu, \mathfrak{S}) + \frac{1}{8\pi} \sigma(\nu) \right\} \\ &\cong \frac{e^2}{4} \left| (\mathfrak{D}_{XX'}, \mathbf{e}_j) \right|^2 \sigma(\nu) \\ f_{XX'}^j(-\nu, \mathfrak{S}) &= 2\pi e^2 \left| (\mathfrak{D}_{XX'}, \mathbf{e}_j) \right|^2 s_j(\nu, \mathfrak{S}), \end{aligned} \right.$$

$$(22a) \quad \text{wobei} \quad \sigma(\nu) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3}.$$

Für normale Strahlungsdichten und für sichtbare oder noch größere Frequenzen ist stets $s_j(\nu, \mathfrak{S}) \ll \sigma(\nu)$. Wir dürfen daher für gewöhnlich in (22) $s_j(\nu, \mathfrak{S})$ gegen $\sigma(\nu)$ vernachlässigen. $\sigma(\nu)$ ist nämlich jene Strahlungsdichte pro Frequenzintervall, bei der die Absorptionswahrscheinlichkeit ebenso groß ist wie die spontane Emissionswahrscheinlichkeit.¹⁾

Wenn wir die Unterscheidung in den Polarisations- und Raumrichtungen fallen lassen, können wir die Funktionen bilden²⁾:

$$(23) \quad \begin{aligned} F_{XX'}(\pm \nu) d\nu &= \sum_{\substack{\nu+d\nu \\ \nu=\nu \\ \mathfrak{e}=\mathfrak{e}}}^{\nu+d\nu} \left| H(X n_{\mathfrak{e}}, X' n_{\mathfrak{e}} \pm 1) \right|^2, \\ F_{XX'}(+\nu) &= \frac{2\pi e^2}{3} \left| \mathfrak{D}_{XX'} \right|^2 \{ \bar{s}(\nu) + \sigma(\nu) \}, \end{aligned}$$

$$(23a) \quad F_{XX'}(-\nu) = \frac{2\pi e^2}{3} \left| \mathfrak{D}_{XX'} \right|^2 \bar{s}(\nu).$$

1) Der Faktor $\frac{1}{8\pi}$ von $\sigma(\nu)$ in (22) entsteht durch Reduktion dieser Strahlungsdichte pro Frequenzintervall auf eine solche pro Polarisationsrichtung \mathbf{e}_j , pro Raumwinkeleinheit und pro Frequenzintervall.

2) Der Faktor $\frac{1}{3}$ in (23) und (23a) rührt von der Mittelung von $\left| (\mathfrak{D}_{XX'}, \mathbf{e}_j) \right|^2$ über alle Richtungen \mathbf{e}_j her.

Es treten also folgende Zustände in die Rechnung ein:
 (A ist das Grundniveau des Atoms, B ein anderes Niveau,
 ν_A^B ist die Bohrsche Frequenz zwischen B und A):

$$\begin{cases} (A, n_1, \dots, n_e, \dots, n_o, \dots) \\ (B, n_1, \dots, n_e - 1, \dots, n_o, \dots) \\ (A, n_1, \dots, n_e - 1, \dots, n_o + 1, \dots) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{dessen Wahrscheinlichkeitsamplitude } a \text{ sei,} \\ \text{"} & \text{"} & b_e \text{ " " ,} \\ \text{"} & \text{"} & a_{e\sigma} \text{ " " .} \end{array} \right\}$$

$$(26) \quad \nu_A^B - \varepsilon < \nu_e < \nu_A^B + \varepsilon, \quad \nu_e - \varepsilon < \nu_o < \nu_e + \varepsilon.$$

Alle anderen Wahrscheinlichkeitsamplituden sind gleich Null. Hierbei ist vorausgesetzt, daß in der Strahlung ($n_1 \dots n_e \dots n_o \dots$) nur eine Atomfrequenz und zwar ν_A^B enthalten ist und von B aus nur der Sprung nach A zurück erlaubt ist. ε ist groß gegen die Linienbreite, aber klein gegen ν_A^B .

Weiter nennen wir

$$(27) \quad H(A n_e, B n_e \pm 1) = H_{AB}^{(\pm e)}.$$

Die Gl. (1) lauten dann, wenn wir die Energie des Anfangszustandes auf Null normieren¹⁾:

$$(28a) \quad -\frac{i}{2\pi} a = \frac{1}{h} \sum_e H_{AB}^{(-e)} b_e,$$

$$(28b) \quad -\frac{i}{2\pi} b_e = \frac{1}{h} H_{AB}^{*(-e)} a + \frac{1}{h} \sum_e H_{BA}^{(e)} a_{e\sigma} + (\nu_A^B - \nu_e) b_e,$$

$$(28c) \quad -\frac{i}{2\pi} a_{e\sigma} = \frac{1}{h} H_{BA}^{(e)} b_e + (\nu_o - \nu_e) a_{e\sigma}.$$

Sie sind formal vollkommen identisch mit den Gl. (23 a, b, c) a. a. O., wenn dort $w_{AB}^{(e)} = 0$ gesetzt wird. Die Absorption und Reemission entspricht formal einer Aufeinanderfolge zweier Emissionen mit entgegengesetzt gleicher Frequenz. Wir machen daher zur Lösung denselben Ansatz (vgl. a. a. O. Gl. 24a, b, c):

1) * bedeutet konjugiert komplex.

$$(29a) \quad a = e^{-2\pi \Gamma^A t},$$

$$(29b) \quad b_e = \beta_e (e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{-2\pi \Gamma_e^B t}),$$

$$(29c) \quad \begin{cases} a_{e\sigma} = \alpha_{e\sigma}^{(0)} (e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{-2\pi \Gamma_{e\sigma}^A t}) \\ \quad + \alpha_{e\sigma}^{(1)} (e^{-2\pi \Gamma_e^B t} - e^{-2\pi \Gamma_{e\sigma}^A t}). \end{cases}$$

Die Anfangsbedingungen $a = 1$, $b_e = a_{e\sigma} = 0$ für $t = 0$ sind damit erfüllt. Setzt man diese Ausdrücke in (28) ein, so lassen sich alle freigelassenen Größen bestimmen. Da die Rechnung vollkommen analog zu der a. a. O. ist, sei sie nur kurz angedeutet.

(29c) in (28c) eingesetzt, gibt:

$$(30) \quad \begin{cases} a) \quad \alpha_{e\sigma}^{(0)} = \frac{1}{i} \frac{H_{BA}^{*(\sigma)} \beta_e}{\Gamma^A - \nu_\sigma + \nu_e}, & c) \quad \Gamma_{e\sigma}^A = i(\nu_e - \nu_\sigma), \\ b) \quad \alpha_{e\sigma}^{(1)} = \frac{-\frac{1}{h} H_{BA}^{*(\sigma)} \beta_e}{i \Gamma_e^B - \nu_\sigma + \nu_e}, \end{cases}$$

die in (28b) vorkommende Summe

$$\frac{1}{h} \sum_\sigma H_{BA}^{(\sigma)} a_{e\sigma}$$

lautet:

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_e}{h^2} \sum_\sigma \frac{|H_{BA}^{(\sigma)}|^2 \{e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{2\pi i(\nu_e - \nu_\sigma)t}\}}{i \Gamma^A + \nu_e - \nu_\sigma} \\ & - \frac{\beta_e}{h^2} \sum_\sigma \frac{|H_{BA}^{(\sigma)}|^2 \{e^{-2\pi \Gamma_e^B t} - e^{2\pi i(\nu_e - \nu_\sigma)t}\}}{i \Gamma_e^B + \nu_e - \nu_\sigma} \\ & = \frac{\beta_e}{h^2} \int_{\nu_e - \varepsilon}^{\nu_e + \varepsilon} F_{BA}(\nu) \frac{e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{2\pi i(\nu_e - \nu)t}}{i \Gamma^A + \nu_e - \nu} d\nu \\ & - \frac{\beta_e}{h^2} \int_{\nu_e - \varepsilon}^{\nu_e + \varepsilon} F_{BA}(\nu) \frac{e^{-2\pi \Gamma_e^B t} - e^{2\pi i(\nu_e - \nu)t}}{i \Gamma_e^B + \nu_e - \nu} d\nu \end{aligned}$$

nach Einführung der Funktion (23). Wir werden später verifizieren, daß Real- und Imaginärteil von Γ^A und Γ_e^B sehr viel kleiner als $\nu_e \sim \nu_A^B$ sind. Dann haben die Integrale eine Form, die wir noch oft brauchen werden:

$$(31) \quad \int_{\nu_0 - \varepsilon}^{\nu_0 + \varepsilon} F(\nu) \frac{e^{-2\pi\Gamma t} - e^{2\pi i(\nu_0 - \nu)t}}{iy + x - \nu} \quad y \ll \nu_0, \quad x - \nu_0 \ll \nu_0.$$

Dieses Integral wurde a. a. O. (17) ausgerechnet und hat den Wert: $i\pi F(x)e^{-2\pi\Gamma t}$. In unserem Falle ist $\nu_0 = \nu_e$; da sich x , y und ν_A^B nur um kleine Größen unterscheiden, dürfen wir im Argument der schwach veränderlichen Funktion $F_{BA}(\nu)$, statt x , ν_A^B setzen und erhalten:

$$(31a) \quad \frac{1}{h} \sum_{\sigma} H_{BA}^{(\sigma)} a_{\sigma} = \frac{i\pi}{h^2} F_{BA}(\nu_A^B) \left\{ e^{-2\pi\Gamma^A t} - e^{-2\pi\Gamma_e^B t} \right\} \beta_e.$$

Gl. (28b) liefert dann durch Koeffizientenvergleich:

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \beta_e = \frac{1}{h} \frac{H_{AB}^{(-e)}}{i(\Gamma^A - \gamma^B) + \nu_e - \nu_A^B}, \quad \text{b) } \Gamma_e^B = \gamma^B - i(\nu_A^B - \nu_e), \\ \text{c) } \gamma^B = \frac{\pi}{h^2} F_{BA}(\nu_A^B) = \frac{2\pi^2 e^2}{3h^2} |\mathfrak{D}_{BA}|^2 \{ \mathfrak{s}(\nu) + \sigma(\nu) \}. \end{array} \right.$$

$4\pi\gamma^B$ ist die Übergangswahrscheinlichkeit des Sprunges $B \rightarrow A$.¹⁾ Die vorausgesetzten Größenverhältnisse der Γ gegen ν_A^B folgen aus der Abschätzung (25). Es ist danach $\gamma^B : \nu_A^B \sim \alpha^3$, der Imaginärteil von Γ_e^B ist kleiner als ε , welches klein gegen ν_A^B angenommen wurde. Γ^A ist, wie wir im folgenden sehen werden, stets bedeutend kleiner als γ^B .

Wir setzen nun die gewonnenen Größen in Gl. (28a) ein und erhalten:

1) Setzen wir (22a) ein, so erhalten wir:

$$4\pi\gamma^B = \frac{64\pi^4 e^2 \nu_A^{B3}}{3h^3} |\mathfrak{D}_{BA}|^2 + \frac{8\pi^3 e^2}{3h^3} |\mathfrak{D}_{BA}|^2 \mathfrak{s}(\nu).$$

Der erste Bestandteil ist bekanntlich die Wahrscheinlichkeit des spontanen, der zweite die des durch die Strahlung $\mathfrak{s}(\nu)$ erzwungenen Übergangs $B \rightarrow A$.

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} i \Gamma^A e^{-2\pi \Gamma^A t} &= \sum_e \frac{|H_{AB}^{(-e)}|^2 \left(e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{-2\pi [\gamma^B + i(\nu_A^B - \nu_e)]t} \right)}{i(\Gamma^A - \gamma^B) + \nu_e - \nu_A^B} \\ &= \int_{\nu_A^B - \varepsilon}^{\nu_A^B + \varepsilon} F_{AB}(-\nu) \frac{e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{-2\pi [\gamma^B + i(\nu_A^B - \nu)]t}}{i(\Gamma^A - \gamma^B) + \nu - \nu_A^B} d\nu, \end{aligned} \right.$$

woraus sich Γ^A berechnen läßt. Da die Wahrscheinlichkeit des Anfangszustandes wie $|a|^2 = e^{-4\pi \gamma^A t}$ abklingt, wobei γ^A der Realteil von Γ^A ist, ist $4\pi \gamma^A$ die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit. Die Berechnung von Γ^A geschieht auf verschiedene Weise, je nachdem, ob das eingestrahle Licht sich über ein Frequenzintervall erstreckt, das groß gegen die Linienbreite ist, oder ob es ganz scharf monochromatisch ist. $F_{AB}(-\nu)$ enthält nach (23 a) die Strahlungsdichte $\bar{s}(\nu)$ als Faktor; im ersten Fall ist also die Funktion $F_{AB}(-\nu)$ an der Stelle ν_A^B eine langsam veränderliche Funktion; es folgt daher nach Anwendung von (31)

$$(34) \quad \Gamma^A = \frac{\pi}{\hbar^2} F_{AB}(-\nu_A^B).$$

Die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ist also

$$(34a) \quad 4\pi \gamma^A = 4\pi \Gamma^A = \frac{8\pi^2 e^2}{3\hbar^2} |\mathfrak{D}_{AB}|^2 \bar{s}(\nu_A^B)$$

in Übereinstimmung mit Dirac, oder, wenn das eingestrahle Licht parallel \mathbf{e}_j polarisiert ist:

$$(34b) \quad 4\pi \gamma^A = \frac{8\pi^2 e^2}{\hbar^2} |(\mathfrak{D}_{AB}, \mathbf{e}_j)|^2 \bar{s}(\nu_A^B).$$

Ist das eingestrahle Licht scharf monochromatisch von der Frequenz ν_0 (schärfer als die natürliche Linienbreite $B-A$), so ist $F_{AB}(-\nu)$ nur an der Stelle ν_0 von Null verschieden und wir erhalten:

$$i \Gamma^A e^{-2\pi \Gamma^A t} = \frac{e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{-2\pi [\gamma^B + i(\nu_A^B - \nu_0)]t}}{i(\Gamma^A - \gamma^B) + \nu_0 - \nu_A^B} \int F_{AB}(-\nu) d\nu.$$

Es scheint zunächst, als ob unser Ansatz, der ein von der Zeit unabhängiges Γ^A verlangt, hier nicht mehr anwendbar wäre.

Γ^A ist aber sicher für normale Strahlungsdichten bedeutend kleiner als γ^B (die Absorptionswahrscheinlichkeit ist wesentlich kleiner als die Emissionswahrscheinlichkeit), so daß nach einer Zeit, nach der der Prozeß überhaupt erst merklich ist, also wenn $|e^{-2\pi\Gamma^A t}|$ von 1 merklich abweicht, $e^{-2\pi\gamma^B t}$ sicher schon lange gegen $e^{-2\pi\Gamma^A t}$ zu vernachlässigen ist, und wir erhalten dann¹⁾:

$$(35) \quad \Gamma^A = \frac{1}{\gamma^B + i(\nu_0 - \nu_A^B)} \cdot \int F_{AB}(-\nu) d\nu,$$

wobei auch im Nenner Γ^A gegen γ^B vernachlässigt wurde. Die Absorptionswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ergibt sich dann zu

$$4\pi\gamma^A = \frac{8\pi^2 e^2}{\hbar^2} \bar{S} \frac{|(\mathfrak{D}_{AB}, \epsilon_j)|^2 \cdot \gamma^B}{(\gamma^B)^2 + (\nu_A^B - \nu_0)^2},$$

wobei $\bar{S} = \int \bar{s}(\nu) d\nu$ die Gesamtstrahlungsdichte ist. Setzen wir für γ^B aus (32) seinen Wert ein, so erhalten wir:

$$(35a) \quad 4\pi\gamma^A = \frac{128\pi^5 e^4}{3\hbar^4} \nu_A^B \bar{S} \frac{|(\mathfrak{D}_{AB}, \epsilon_j)|^2 |\mathfrak{D}_{BA}|^2}{(\gamma^B)^2 + (\nu_A^B - \nu_0)^2}.$$

Dies vergleichen wir nun mit der Heisenberg-Kramerschen Dispersionsformel. Danach ist die Wahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit, das ein Lichtquant der Frequenz ν_0 und der Polarisation ϵ_j gestreut wird, gleich

$$(36) \quad \frac{128\pi^5 e^4}{3\hbar^4} \nu_0^3 \bar{S} \left| \sum_N \left\{ \frac{(\mathfrak{D}_{AN}, \epsilon_j) \mathfrak{D}_{NA}}{\nu_A^N - \nu_0} + \frac{(\mathfrak{D}_{NA}, \epsilon_j) \mathfrak{D}_{AN}}{\nu_A^N + \nu_0} \right\} \right|^2,$$

wenn ν_0 nicht in der Nähe einer Atomfrequenz ν_A^N liegt. Man sieht, daß dieser Ausdruck zwanglos in die Resonanzfluoreszenz (35a) übergeht, wenn ν_0 an eine Atomfrequenz ν_A^B herandrückt. Man kann dann in der Summe alle Glieder bis auf

1) Daß die Verhältnisse so liegen, garantiert uns schon folgende Überlegung; wenn es uns überhaupt möglich ist, monochromatisches Licht herzustellen, das viel schärfer ist als die Linienbreite, so muß nach der Heisenbergrelation auch die Lebensdauer dieses Lichtes viel größer sein als die Lebensdauer des Resonanzniveaus B. Diese ist aber $\frac{1}{4\pi\gamma^B}$, während die Lebensdauer des Anfangszustandes $\frac{1}{4\pi\gamma^A}$ ist. Es muß also $\gamma^A \ll \gamma^B$ sein.

das zu ν_A^B gehörige weglassen. Im Nenner dieses Gliedes tritt als Dämpfungsglied $i\gamma^B$ auf, welches man für gewöhnlich neben $\nu_A^B - \nu_0$ vernachlässigen darf. Es ist das $\frac{1}{4\pi}$ -fache der Übergangswahrscheinlichkeit $B \rightarrow A$, genau wie in der klassischen Theorie der erzwungenen gedämpften Schwingungen, wo an dieser Stelle das $\frac{1}{4\pi}$ -fache der reziproken Abklingungszeit steht.

Wir untersuchen nun die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf die möglichen Endzustände des Prozesses. Zu dem Zweck bilden wir die Wahrscheinlichkeit $|a_{e\sigma}|^2$ des Zustandes $(A, n_1, \dots, n_e - 1, \dots, n_\sigma + 1, \dots)$ nach längerer Zeit mit Hilfe von (29c), (30c), (32c)

$$(37) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |a_{e\sigma}|^2 = W_{e\sigma} = |a_{e\sigma}^{(0)} + a_{e\sigma}^{(1)}|^2,$$

also die Wahrscheinlichkeit, daß nach Beendigung des Prozesses — nach Absorption und Reemission eines Quants — der ρ -te Oszillator um ein Quant weniger, der σ -te Oszillator um ein Quant mehr besetzt ist. Nach (30) und (32) wird

$$\begin{aligned} a_{e\sigma}^{(0)} + a_{e\sigma}^{(1)} &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{H_{AB}^{*(-\rho)} H_{BA}^{*(\rho)}}{i(\Gamma^A - \gamma^B) + \nu_e - \nu_A^B} \left(\frac{1}{i\Gamma^A - \nu_\sigma + \nu_e} - \frac{1}{i\gamma^B - \nu_\sigma + \nu_A^B} \right) \\ &= \frac{1}{\hbar^2} \frac{H_{AB}^{*(-\rho)} H_{BA}^{*(\sigma)}}{(i\Gamma^A - \nu_\sigma + \nu_e)(i\gamma^B - \nu_\sigma + \nu_A^B)}. \end{aligned}$$

Wir erhalten also¹⁾

$$(37a) \quad W_{e\sigma} = \frac{1}{\hbar^4} \frac{|H_{AB}^{*(-\rho)}|^2 |H_{BA}^{*(\sigma)}|^2}{[(\gamma^A)^2 + (\nu_e - \nu_\sigma)^2][(\gamma^B)^2 + (\nu_A^B - \nu_\sigma)^2]}.$$

Um von der Wahl der Eigenschwingungen unabhängig zu sein, summieren wir über alle ρ und σ , für die ν zwischen ν und $\nu + d\nu$ liegt und ν_σ zwischen ν' und $\nu' + d\nu'$ und erhalten so mit Hilfe von (23)

$$(38) \quad W(\nu, \nu') d\nu d\nu' = \frac{1}{\hbar^4} \frac{F_{AB}(-\nu) F_{BA}(\nu') d\nu d\nu'}{[(\gamma^A)^2 + (\nu - \nu')^2][(\gamma^B)^2 + (\nu_A^B - \nu')^2]}$$

als Wahrscheinlichkeit, daß nach Beendigung des Prozesses ein Lichtquant der Frequenz ν absorbiert und eines der Frequenz ν' emittiert worden ist.

1) γ^A ist der Realteil von Γ^A . Der Imaginärteil ist bei der Form (34) Null, bei der Form (35) sei er vernachlässigt.

Die erste Klammer im Nenner zeigt die Beziehung zwischen der Frequenz des eingestrahnten und ausgestrahlten Lichtes. Die Wahrscheinlichkeit hat für $\nu = \nu'$ ein sehr scharfes Maximum¹⁾; die Halbwertsbreite der Abweichung $\nu - \nu'$ ist γ^A , also gleich $\frac{1}{4\pi}$ -mal der Absorptionswahrscheinlichkeit. Sie ist abhängig von der Strahlungsdichte, aber in normalen Fällen erheblich kleiner als die natürliche Linienbreite der Emissionslinie $B \rightarrow A$, denn diese hat die Größenordnung der Übergangswahrscheinlichkeit γ^B . Diese Abweichung ist nichts anderes als die Energieunschärfe, die von vornherein auf Grund der Heisenbergrelation dadurch hervorgerufen wird, daß die Lebensdauer des Anfangszustandes begrenzt ist und im Mittel $\frac{1}{4\pi\gamma^A}$ beträgt. Die Resonanzstrahlung stimmt also so scharf wie irgend möglich mit der Frequenz des eingestrahnten Lichtes überein.

Um die Form der Absorptionslinie zu erhalten, bilden wir die Wahrscheinlichkeit, daß bei konstanter Strahlungsdichte ein Lichtquant mit einer Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ verschwunden ist unabhängig davon, welches Licht reemittiert wird. Wir müssen also (38) über alle ν' integrieren.²⁾ Das liefert, wenn man (32c) beachtet

$$\frac{1}{h^2} \frac{F_{AB}(-\nu) d\nu}{(\gamma^A + \gamma^B)^2 + (\nu_A^B - \nu)^2}.$$

1) Es scheint, als ob hier der oben vernachlässigte Imaginärteil von γ^A — er sei δ^A genannt — eine wesentliche Rolle spielt. Das Maximum von $W(\nu, \nu')$ läge nämlich nicht bei $\nu = \nu'$, sondern bei $\nu = \nu' + \delta^A$. Der Endzustand hätte also dann mit allergrößter Wahrscheinlichkeit eine andere Energie als der Anfangszustand. Dies liegt aber bloß daran, daß wir den Prozeß nach der Reemission abgebrochen hatten. Hätten wir dies nicht getan, so wären Anfangszustand und Endzustand völlig gleichartig; das Glied δ^A fällt dann — wie hier nicht näher ausgeführt werden soll — aus dem Ausdruck heraus.

2) Diese Integration ist leicht auf komplexem Wege ausführbar, wenn man bedenkt, daß der Ausdruck für $\nu' = \nu_A^B$ ein sehr steiles Maximum hat, so daß man die von ν' schwach abhängende Funktion im Zähler mit dem Werte an der Stelle ν_A^B vor das Integral ziehen kann und den Rest von $-\infty$ bis $+\infty$ integrieren kann, da doch nur die Stelle im Maximum wesentlich dazu beiträgt.

Die Linienform ist dieselbe wie bei spontaner Emission (vgl. a. a. O., Formel 3). Die Halbwertsbreite ist aber hier nach (34a) und (32c)

$$(39) \quad \gamma^A + \gamma^B = \frac{2\pi^2 e^2}{3\hbar^2} |\mathfrak{D}_{BA}|^2 \{2\bar{s}(\nu_A^B) + \sigma(\nu_A^B)\},$$

sie geht für $\bar{s}(\nu_A^B) = 0$ in die natürliche Breite bei spontaner Emission über. Man kann diesen Ausdruck folgendermaßen deuten: Nach a. a. O. ist die Breite einer Linie $A-B$ die Summe der Breiten der beiden Niveaus A und B . Diese Breiten sind das $\frac{1}{4\pi}$ -fache ihrer reziproken Lebensdauern. In unserem Fall ist $4\pi\gamma^A$ die reziproken Lebensdauer des Grundzustandes bei Vorhandensein von Strahlung, $4\pi\gamma^B$ ist die des angeregten Zustandes B , woraus also für die Absorptionslinie die Breite (39) folgt. Die natürliche Linienbreite der Absorptionslinie ist größer, als sie aus der korrespondenzmäßigen Relation: Linienbreite $= \frac{1}{4\pi}$. Übergangswahrscheinlichkeit zu erwarten wäre. Diese Relation ergäbe nach (32c) nur eine Halbwertsbreite $\frac{2\pi^2 e^2}{3\hbar^2} |\mathfrak{D}_{BA}|^2 \{\bar{s}(\nu_A^B) + \sigma(\nu_A^B)\}$. Zur Breite trägt eben auch noch die Unschärfe des Grundniveaus bei, die durch die Strahlung und der damit verbundenen endlichen Lebensdauer des Niveaus hervorgerufen wird.

Interessieren wir uns nicht nur für die Frequenz, sondern auch für die Richtung und Polarisation der eingestrahnten und reemittierten Strahlung, so bilden wir statt (38), nachdem wir die einfachen Indizes ρ und σ durch die dreifachen i, k, j , bzw. i', k', j' ersetzen (die Summenbezeichnung vgl. Formel (14)):

$$(40) \quad \left\{ \begin{aligned} & W_{j,j'}(\nu \nu' \mathfrak{S} \mathfrak{S}') d\nu d\nu' dS dS' \\ &= \sum_{\substack{\nu \rightarrow \nu' \\ i \parallel \mathfrak{S}}}^{\nu + d\nu} \sum_{\substack{\nu' \rightarrow \nu'' \\ i' \parallel \mathfrak{S}'}}^{\nu' + d\nu'} W_{i k j, i' k' j'} \quad \begin{aligned} i, i' &= 1 \text{ für } + \mathfrak{S}, + \mathfrak{S}' \\ i, i' &= 2 \text{ für } - \mathfrak{S}, - \mathfrak{S}' \end{aligned} \end{aligned} \right.$$

Wir summieren also $W_{\rho\sigma}$ über jene ρ und σ , deren Oszillatoren Wellen in der Richtung \mathfrak{S} bzw. \mathfrak{S}' , der Frequenz ν bzw. ν' darstellen, und parallel e_i bzw. $e_{i'}$ polarisiert sind. Somit gibt (40) die Wahrscheinlichkeit, daß nach Beendigung des Prozesses ein Lichtquant der Frequenz ν der Richtung \mathfrak{S} und

der Polarisierung parallel \mathbf{e}_j verschwunden ist und eines der Frequenz ν' der Richtung \mathbf{S}' und der Polarisierung parallel $\mathbf{e}_{j'}$ dazu gekommen ist. Wir erhalten so mit Hilfe der Funktionen (21) aus (37a):

$$W_{jj'}(\nu \nu' \mathbf{S} \mathbf{S}') d\nu d\nu' dS dS' \\ = \frac{1}{h^4} \frac{f_{AB}^2(\nu, \mathbf{S}) f_{BA}^2(\nu', \mathbf{S}') d\nu d\nu' dS dS'}{[(\gamma^A)^2 + (\nu - \nu')^2][(\gamma^B)^2 + (\nu_A^B - \nu')^2]},$$

und nach Einsetzen von (22)¹⁾

$$(41) \left\{ \begin{array}{l} W_{jj'}(\nu \nu' \mathbf{S} \mathbf{S}')_A \\ = \frac{4\pi e^4}{h^4} \frac{s_j(\nu, \mathbf{S}) \sigma(\nu') |(\mathbf{D}_{AB}, \mathbf{e}_j)|^2 |(\mathbf{D}_{BA}, \mathbf{e}_{j'})|^2}{[(\gamma^A)^2 + (\nu - \nu')^2][(\gamma^B)^2 + (\nu_A^B - \nu')^2]} \end{array} \right.$$

Wir geben hier ohne Rechnung das entsprechende Resultat für den Fall an, daß die beiden Voraussetzungen — in der Strahlung befinde sich nur eine Atomfrequenz ν_A^B ; von B aus ist nur ein Sprung und zwar nach A möglich — nicht zutreffen, sondern daß die Strahlung mehr Niveaus B_m , $m = 1, 2, \dots$ anregen kann, und von dort aus mehrere Niveaus A_μ , $\mu = 1, 2, \dots$ erreichbar sind, unter denen sich der Grundzustand befindet. Die A_μ und B_m kombinieren nicht untereinander. Alle Niveaus seien unentartet. Die zu (41) analoge Wahrscheinlichkeit bei dem Übergang $A_\mu \rightarrow B_m \rightarrow A_{\mu'}$ ist dann

$$(41a) \left\{ \begin{array}{l} W_{jj'}(\nu \nu' \mathbf{S} \mathbf{S}') \\ = \frac{4\pi e^4}{h^4} \frac{s_j(\nu, \mathbf{S}) \sigma(\nu') |(\mathbf{D}_{A_\mu B_m}, \mathbf{e}_j)|^2 |(\mathbf{D}_{B_m A_{\mu'}}, \mathbf{e}_{j'})|^2}{[(\gamma^{A_\mu})^2 + (\nu - \nu' + \nu_{A_\mu}^{A_{\mu'}})^2][(\gamma^{B_m})^2 + (\nu_{A_\mu}^{B_m} - \nu')^2]}, \end{array} \right.$$

wobei aber γ^{A_μ} und γ^{B_m} nicht mehr dieselben sind wie in (41). $4\pi\gamma^{A_\mu}$ ist die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten von A_μ in alle B_m , $4\pi\gamma^{B_m}$ ist die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten von B_m in alle A_μ . Die Termdifferenz $\nu_{A_\mu}^{A_{\mu'}}$ ($\frac{1}{h}$ -mal Energiedifferenz von $A_{\mu'}$ und A_μ) tritt im Nenner des

1) Es scheint so, als ob die rechte Seite von (41) unabhängig von \mathbf{S}' wäre. Dies ist nicht der Fall. Die Richtungen der Vektoren \mathbf{e}_j und $\mathbf{e}_{j'}$ sind Funktionen von \mathbf{S} und \mathbf{S}' .

halb auf, weil an dieser Stelle die Energiedifferenz zwischen Anfangs- und Endzustand steht, die in (41) $\nu - \nu'$, hier aber $\nu - \nu' + \nu_{A\mu}^{A\mu'}$ ist.

Wenn wir (41) über alle ν und ν' integrieren, erhalten wir die Beziehungen zwischen den Polarisations- und Strahlungsrichtungen allein. Diese Integration ist mit Hilfe der in Fußnote auf S. 43 angegebenen Methode leicht durchzuführen. Wir erhalten dann die Wahrscheinlichkeit, daß ein Lichtquant, welches vor dem Prozeß die Richtung \mathfrak{S} hatte und parallel \mathbf{e}_j polarisiert war, nach dem Prozeß die Richtung \mathfrak{S}' hat und parallel $\mathbf{e}_{j'}$ polarisiert ist, zu

$$(42) \frac{4\pi^3 e^4}{h^4} \frac{1}{\gamma^A \gamma^B} |(\mathfrak{D}_{AB}, \mathbf{e}_j)|^2 |(\mathfrak{D}_{BA}, \mathbf{e}_{j'})|^2 s_j (\nu_A^B, \mathfrak{S}) \sigma(\nu_A^B) dS dS'.$$

Dieser Ausdruck gibt unter der gemachten Voraussetzung, daß B nicht entartet ist, auf alle Fragen über die lineare Polarisation und über die Richtungsverteilung des Resonanzlichtes Antwort.

Ist der Sprung $B - A$ z. B. ein solcher, bei dem sich die magnetische Quantenzahl m nicht ändert, so gibt es ein Koordinatensystem, (z -Achse parallel zum aufspaltenden Magnetfeld) in dem \mathfrak{D}_{AB} die Koordinaten $(0, 0, Z)$ hat. Ausdruck (42) wird dann:

$$\frac{4\pi^3 e^4}{h^4} \frac{1}{\gamma^A \gamma^B} Z^2 (\mathbf{e}_j)_z^2 (\mathbf{e}_{j'})_z^2 s_j (\nu_A^B, \mathfrak{S}) \sigma(\nu_A^B) dS dS'.$$

Faßt man alle Größen, die nicht von \mathfrak{S} und \mathfrak{S}' abhängen, in einem Fektor C zusammen, so kann man diesen Ausdruck auch in der Form

$$C \cos^2 \vartheta \cos^2 \vartheta' s_j (\nu_A^B, \mathfrak{S}) dS dS'$$

schreiben, wobei ϑ und ϑ' die Winkel zwischen dem elektrischen Vektor des ein- bzw. ausgestrahlten Lichtes und der z -Achse sind. ($\cos \vartheta = (\mathbf{e}_j)_z$, $\cos \vartheta' = (\mathbf{e}_{j'})_z$). Die Resonanzstrahlung ist hiernach, was Richtungsverteilung und Polarisation betrifft, dieselbe, die ein klassischer Oszillator in demselben Strahlungsfeld aussenden würde, dessen Schwingungsrichtung in der z -Achse liegt.

Ändert sich bei dem Sprung $B - A$ die Quantenzahl m um 1, so folgt aus (41) die bekannte elliptische bzw. zirkuläre Polarisation des Resonanzlichtes, in der Weise, daß die Wahrscheinlichkeit für keine Polarisationsrichtung verschwindet, aber ein Maximum und Minimum besitzt, bzw. in allen Richtungen gleich ist.¹⁾

Wir haben bisher die Voraussetzung gemacht, daß die betrachteten Atomniveaus unentartet sind. Wenn Entartung vorliegt, oder wenn die Aufspaltungen bereits so klein sind, daß sie mit der natürlichen Linienbreite vergleichbar werden, ist die Rechnung nicht mehr in der durchgeführten Art möglich. Der wesentliche Unterschied gegen die frühere Rechnung liegt darin, daß der Endzustand nicht mehr eindeutig den Weg determiniert, auf dem er aus dem Anfangszustand entstanden ist. Wenn z. B. das Resonanzniveau B m -fach entartet ist, so ist der Endzustand — Atom im Grundniveau, Lichtquant ρ absorbiert, Lichtquant σ emittiert — auf m Wegen erreichbar. Nur wenn die Entfernungen der Niveaus wesentlich größer als die Linienbreiten sind, gibt es keinen Endzustand, der auf mehreren Wegen zu erreichen ist. Die Frequenz des absorbierten und emittierten Quants läßt dann stets einen genauen Schluß auf den Mittelzustand zu.

Es lohnt sich, die neue Rechnung durchzuführen, da wir sie später noch brauchen werden, und zwar für den Fall, daß der Grundzustand A nicht entartet ist und daß die Entartung von B ganz schwach (von der Größenordnung der Linienbreite) aufgespalten ist. Der allgemeinste Fall, bei dem A auch mehrfach ist, bietet prinzipiell keine neuen Schwierigkeiten; wir geben am Schluß der Rechnung die auf diesen Fall erweiterten Resultate an.

Es treten also statt des einen Zustandes ($B, n_1, \dots, n_e - 1 \dots$) N benachbarte ($B_n, n_1 \dots n_e - 1 \dots$); $n = 1 \dots N$, auf, deren Wahrscheinlichkeitsamplitude b_e^n sei. Die Frequenz $B_n \rightarrow A$ sei $\nu_A^{B_n}$. Die Gleichungen (28) lauten dann:

1) Daraus folgt noch nicht exakt die elliptische oder zirkuläre Polarisation, es könnte ja auch inkohärente Depolarisation eingetreten sein. Man müßte erst das Strahlungsfeld in elliptische bzw. zirkuläre Wellen zerlegen, um dies einwandfrei zu beweisen.

$$(43a) \quad \frac{i}{2\pi} \dot{a} = \frac{1}{\hbar} \sum_n \sum_e H_{AB_n}^{(-e)} b_e^n,$$

$$(43b) \quad \frac{i}{2\pi} \dot{b}_e^n = \frac{1}{\hbar} H_{AB_n}^{*(+e)} a + \frac{1}{\hbar} \sum_\sigma H_{B_n A}^{(\sigma)} a_{e\sigma} + (v_{A^n} - v_e) b_e^n,$$

$$(43c) \quad \frac{i}{2\pi} \dot{a}_{e\sigma} = \frac{1}{\hbar} \sum_n H_{B_n A}^{*(\sigma)} b_e^n + (v_\sigma - v_e) a_{e\sigma}.$$

Die $H_{AB_n}^{(\pm e)}$ haben die entsprechende Bedeutung, wie die $H_{AB}^{(\pm e)}$. Es sei schon hier hervorgehoben, daß die wesentlichen Abweichungen von dem nichtentarteten Problem auf folgendem beruhen: Man sieht an (43c) leicht, daß *nicht* die Wahrscheinlichkeit $|a_{e\sigma}|^2$ des Endzustandes sich additiv aus den Beiträgen, die die einzelnen B_n zum Endzustand liefern, zusammensetzt, sondern bloß ihre Amplitude $a_{e\sigma}$. Der Gesamtprozeß ist also nicht eine einfache Zusammensetzung der möglichen Einzelprozesse $A - B_n - A$, wie es wohl der Fall wäre, wenn B so stark aufgespalten wäre, daß ein gemeinsamer Endzustand $a_{e\sigma}$ nicht in Frage kommt. Es entsteht also „Interferenz der Wahrscheinlichkeiten“.

Zur Lösung von (43) machen wir folgenden zu (29) analogen Ansatz:

$$(44a) \quad a = e^{-2\pi i \Gamma^A t}.$$

$$(44b) \quad b_e^n = \beta_e^n (e^{-2\pi i \Gamma^A t} - e^{-2\pi i \Gamma_e^{B_n} t}).$$

$$(44c) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{e\sigma} &= \alpha_{e\sigma}^{(0)} (e^{-2\pi i \Gamma^A t} - e^{-2\pi i \Gamma_{e\sigma}^A t}) \\ &+ \sum_{n=1}^N \alpha_{e\sigma}^{(n)} (e^{-2\pi i \Gamma_e^{B_n} t} - e^{-2\pi i \Gamma_{e\sigma}^A t}). \end{aligned} \right.$$

Der Ausdruck für b_e^n gleicht formal dem Ausdruck (29b) für das nichtentartete Niveau, während $a_{e\sigma}$ mehr Glieder enthält, entsprechend dem Umstand, daß dieser Zustand von allen B_n unabhängig erreichbar ist. Einsetzen von (44c) in (43c) ergibt:

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_{e\sigma}^{(0)} &= \frac{1}{\hbar} \frac{\sum_n H_{B_n A}^{*(\sigma)} \beta_e^n}{i \Gamma^A - v_\sigma + v_e}, & \Gamma_{e\sigma}^A &= i(v_e - v_\sigma). \\ \alpha_{e\sigma}^{(n)} &= -\frac{1}{\hbar} \frac{H_{B_n A}^{*(\sigma)} \beta_e^n}{i \Gamma_e^{B_n} - v_\sigma + v_e}, \end{aligned} \right.$$

Die Summe $\frac{1}{\hbar} \sum_{\sigma} H_{B_n A}^{(\sigma)} a_{\sigma}^{(e)}$ lautet:

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\hbar^2} \sum_m \beta_{\sigma}^m \sum_{\sigma} \frac{H_{B_n A}^{(\sigma)} H_{B_m A}^{*(\sigma)} \left\{ e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{2\pi i(\nu_{\sigma} - \nu_{\sigma}) t} \right\}}{i \Gamma^A + \nu_{\sigma} - \nu_{\sigma}} \\ & - \frac{1}{\hbar^2} \sum_m \beta_{\sigma}^m \sum_{\sigma} \frac{H_{B_n A}^{(\sigma)} H_{B_m A}^{*(\sigma)} \left\{ e^{-2\pi \Gamma_{\sigma}^B t} - e^{2\pi i(\nu_{\sigma} - \nu_{\sigma}) t} \right\}}{i \Gamma_{\sigma}^B + \nu_{\sigma} - \nu_{\sigma}} \end{aligned} \right.$$

Wenn wir setzen:

$$(47) \quad \sum_{\nu_{\sigma} = \nu}^{\nu + d\nu} H_{B_n A}^{(\sigma)} H_{B_m A}^{*(\sigma)} = \varphi_{nm}(\nu) d\nu.$$

(Die Funktionen φ_{nm} sind nach (23) identisch mit $F_{B_n A}(\nu)$), so wird aus (46) nach (31) analog (31a)

$$(48) \quad \frac{1}{\hbar} \sum_{\sigma} H_{B_n A}^{(\sigma)} a_{\sigma}^{(e)} = \frac{i\pi}{\hbar^2} \sum_m \beta_{\sigma}^m \varphi_{nm}(\nu_{\sigma}) \left\{ e^{-2\pi \Gamma^A t} - e^{-2\pi \Gamma_{\sigma}^B t} \right\}.$$

Setzt man dies in (43b) ein, so sieht man, daß eine Verifikation des Ansatzes (44) im allgemeinen nicht möglich ist, da links bloß die e -Potenzen $e^{-2\pi \Gamma^A t}$ und $e^{-2\pi \Gamma_{\sigma}^B t}$, rechts hingegen alle $e^{-2\pi \Gamma_{\sigma}^B t}$ vorkommen. Der Ansatz (44) ist nur dann möglich, wenn $\varphi_{nm} = 0$ für $n \neq m$.¹⁾

Dies trifft in unserm speziellen Falle zu, wie wir weiter unten beweisen werden. Wir erhalten dann aus (44b) durch Koeffizientenvergleich

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_{\sigma}^n &= \frac{1}{\hbar} \frac{H_{A B_n}^{*(-\sigma)}}{i(\Gamma^A - \gamma_{\sigma}^B) + \nu_{\sigma} - \nu_A^B}, & \gamma_{\sigma}^B &= \frac{\pi}{\hbar^2} \varphi_{nn}(\nu_A^B) \\ \Gamma_{\sigma}^B &= \gamma_{\sigma}^B + i(\nu_A^B - \nu_{\sigma}), & &= \frac{\pi}{\hbar^2} F_{B_n A}(\nu_A^B). \end{aligned} \right.$$

1) Dadurch, daß alle durch β_{σ}^m charakterisierten Zustände in denselben Zustand a_{σ} übergehen können, sind sie nicht mehr voneinander unabhängig, was sich darin äußert, daß in (44b) β_{σ}^m durch die Summe $\sum_{\sigma} H_{B_n A}^{(\sigma)} a_{\sigma}^{(e)}$ auch mit den andern β_{σ}^m , $m \neq n$ verknüpft ist. Das ist nicht mehr der Fall, wenn $\varphi_{nm} = 0$ für $n \neq m$; dann sind die β_{σ}^n trotz des gemeinsamen Endzustandes unabhängig voneinander. Ansatz (44) setzt diese Unabhängigkeit voraus.

Aus (44a) folgt dann genau wie früher, wenn $F_{AB_n}(-\nu)$ an der Stelle $\nu_A^{B_n}$ langsam veränderliche Funktionen sind:

$$(50) \quad I^A = \sum_n F_{AB_n}(-\nu_A^{B_n}) .$$

Die Absorptionswahrscheinlichkeit wird, falls sich $\bar{s}(\nu)$ über ein größeres Frequenzintervall erstreckt, zu

$$(50a) \quad 4\pi \gamma^A = \frac{8\pi^2 e^2}{3\hbar^2} \sum_n \bar{s}(\nu_A^{B_n}) |\mathfrak{D}_{B_n A}|^2$$

in Übereinstimmung mit den üblichen Vorstellungen. Sie ist, wie ein Vergleich mit (34a) zeigt, die Summe der Übergangswahrscheinlichkeiten in die einzelnen Niveaus B_n .

Wir beweisen nun $\varphi_{nm} = 0$ für $n \neq m$ für den Fall, daß die Entartung von B durch die freie Drehbarkeit hervorgerufen sein soll. Dann können die $H_{B_n A}^{(\sigma)}$ infolge der Auswahlregeln in den Quantenzahlen m nur für drei Niveaus B_n von Null verschieden sein. Die entsprechenden Vektormatrixelemente $\mathfrak{D}_{B_n A}$ haben im geeigneten Koordinatensystem die Komponenten: $(0, 0, Z)$ für den Sprung $m \rightarrow m$, $(X, iX, 0)$ für den Sprung $m \rightarrow m - 1$, $(X', -iX', 0)$ für den Sprung $m \rightarrow m + 1$.

Wir bilden nun die Summen:

$$(51) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{nm}(\nu) d\nu &= \sum_{\sigma=\nu}^{\nu+d\nu} H_{B_n A}^{(\sigma)} H_{B_m A}^{(\sigma)} \\ &= \sigma(\nu) d\nu \cdot 4\pi e^2 \\ &\quad \int \{ (\mathfrak{D}_{B_n A}, \mathbf{e}_1)(\mathfrak{D}_{A B_m}, \mathbf{e}_1) + (\mathfrak{D}_{B_n A}, \mathbf{e}_2)(\mathfrak{D}_{A B_m}, \mathbf{e}_2) \} dS \\ &= -\sigma(\nu) d\nu \cdot 4\pi e^2 \\ &\quad \int (\mathfrak{D}_{B_n A}, \mathfrak{S})(\mathfrak{D}_{A B_m}, \mathfrak{S}) dS = 0 \quad \text{für } n \neq m, \end{aligned} \right.$$

wenn wir beachten, daß \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathfrak{S} drei aufeinander senkrechte Einheitsvektoren bilden, und $\mathfrak{D}_{B_n A}$ auf $\mathfrak{D}_{A B_m}$ senkrecht steht.

Das Integral in (51) ist aber der Mittelwert des Produktes der Projektionen zweier senkrechter Vektoren auf alle Richtungen und verschwinden daher.

Aus (45) und (49) erhalten wir

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{e\sigma} &= \lim_{t \rightarrow \infty} |\alpha_{e\sigma}|^2 = |\alpha_{e\sigma}^{(0)} + \sum_n \alpha_{e\sigma}^{(n)}|^2 \\ &= \frac{1}{h^4} \left| \sum_n \frac{H_{ABn}^{*(-e)} H_{BnA}^{(e)}}{[i\Gamma_A + \nu_e - \nu_\sigma][i\gamma_{Bn} + \nu_\sigma - \nu_{A_n}]} \right|^2. \end{aligned} \right.$$

Die Wahrscheinlichkeit $W_{jj'}(\nu\nu'\mathfrak{S}\mathfrak{S}')d\nu d\nu' dS dS'$ nach stattgefundener Resonanzfluoreszenz ein Lichtquant der Frequenz ν der Richtung \mathfrak{S} und der Polarisierung e_j weniger, eines der Frequenz ν' der Richtung \mathfrak{S}' und der Polarisierung $e_{j'}$ mehr zu finden, ergibt sich dann noch (40) und mit Hilfe der Funktionen (22) zu:

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{jj'}(\nu\nu'\mathfrak{S}\mathfrak{S}') &= \frac{4\pi e^2}{h^4} \frac{s_j(\nu\mathfrak{S})\sigma(\nu')}{(\gamma_A)^2 + (\nu - \nu')^2} \\ &\cdot \left| \sum_n \frac{(\mathfrak{D}_{BnA} e_j)(\mathfrak{D}_{ABn} e_{j'})}{i\gamma_{Bn} + \nu' - \nu_{A_n}} \right|^2. \end{aligned} \right.$$

Ist das Niveau A auch entartet oder schwach aufgespalten — seine Komponenten seien A_μ ($\mu = 1 \dots M$) —, so wird die Rechnung getrennt für die M -Anfangszustände A_μ durchgeführt, die alle zur Zeit $t = 0$ gleich wahrscheinlich sind. Aus dem μ -ten dieser Anfangszustände können außerdem M -Endzustände $\alpha_{e\sigma}^{\mu\mu'}$ ($\mu' = 1 \dots M$) entstehen, da das Atom bei der Reemission in ein beliebiges $A_{\mu'}$ fallen kann.¹⁾

Die Wahrscheinlichkeit, daß nach dem Prozeß ein Lichtquant ν_e verschwunden, ein Lichtquant ν_σ dazugekommen ist, unabhängig davon, wo das Atom war und in welches Niveau es zurückfällt, ist dann $W_{e\sigma} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_\mu \sum_{\mu'} |\alpha_{e\sigma}^{\mu\mu'}|^2$. Daraus ergibt sich in ähnlicher Weise wie bisher für die Wahrscheinlichkeit $W_{jj'}(\nu\nu'\mathfrak{S}\mathfrak{S}')$, unabhängig davon, welchen speziellen Weg $A_\mu - B_m - A_{\mu'}$ das Atom einschlägt:

1) Eine Kombination der A_μ oder B_m unter sich sei verboten.

$$(54) \left\{ \begin{aligned} W_{jj'}(\nu \nu' \mathfrak{E} \mathfrak{E}') &= \frac{4\pi e^4}{h^4} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \frac{s_j(\nu \mathfrak{E}) \sigma(\nu')}{(\gamma^{A\mu})^2 + (\nu - \nu' + \nu_{A\mu}^{A\mu})^2} \\ &\quad \cdot \left| \sum_n \frac{(\mathfrak{D}_{B_m A\mu} e_j)(\mathfrak{D}_{A\mu' B_m} e_{j'})}{i \gamma^{B_m} + \nu' - \nu_{A\mu'}^{B_m}} \right|^2 \\ \gamma^{A\mu} &= \frac{\pi}{h^2} \sum_m F_{A\mu B_m} (\nu_{B_m}^{A\mu}), \\ \gamma^{B_m} &= \frac{\pi}{h^2} \sum_{\mu} F_{B_m A\mu} (\nu_{A\mu}^{B_m}). \end{aligned} \right.$$

$4\pi\gamma^{A\mu}$ und $4\pi\gamma^{B_m}$ sind die Summen der Übergangswahrscheinlichkeiten von A_{μ} in alle B_m bzw. von B_m in alle A_{μ} .

Wir diskutieren Formel (54) erst für den Fall stärkerer Aufspaltung; die Differenzen zwischen den $\nu_{A\mu}^{B_m}$ mögen groß gegen γ^{B_m} , also groß gegen die natürliche Linienbreite sein. Die Entartung von A und B sei also völlig aufgehoben. Unser Problem geht dann in den Fall über, für welchen Formel (41a) gilt. Ausdruck (54) ist in diesem Falle nur wesentlich von Null verschieden, wenn ν' in der Nähe eines $\nu_{A\mu'}^{B_m}$ fällt. Der Faktor $\frac{1}{i \gamma^{B_m} + \nu' - \nu_{A\mu'}^{B_m}}$ scheidet aus der Summe über m stets nur ein Glied heraus, wenn $\nu' \sim \nu_{A\mu'}^{B_m}$ ist. Bloß wenn die Unterschiede in den $\nu_{A\mu'}^{B_m}$ klein werden, treten die einzelnen Summanden zugleich auf. $W_{jj'}(\nu \nu' \mathfrak{E} \mathfrak{E}')$ läßt sich daher in der Form

$$(55) \left\{ \begin{aligned} W_{jj'}(\nu \nu' \mathfrak{E} \mathfrak{E}') &= \frac{4\pi e^4}{h^4} \sum_{\mu} \sum_{\mu'} \sum_m \\ &\quad \frac{s_j(\nu, \mathfrak{E}) \sigma(\nu') |(\mathfrak{D}_{B_m A\mu} e_j)|^2 |(\mathfrak{D}_{A\mu' B_m} e_{j'})|^2}{[(\gamma^{A\mu})^2 + (\nu - \nu' + \nu_{A\mu}^{A\mu})^2] [(\gamma^{B_m})^2 + (\nu_{A\mu'}^{B_m} - \nu')^2]} \end{aligned} \right.$$

schreiben, da doch nur die Stellen bei $\nu' \cong \nu_{A\mu'}^{B_m}$, in denen der Nenner klein ist, wesentlich beitragen, was in (54) und (55) dasselbe liefert. Vergleicht man dies mit (41a), so erkennt man, daß dieses $W_{jj'}(\nu \nu' \mathfrak{E} \mathfrak{E}')$ die Summe aller jener $W_{jj'}$ ist, die zu allen Übergängen $A_{\mu} \rightarrow B_m \rightarrow A_{\mu'}$ gehören. Die Wahrscheinlichkeit für Richtung, Polarisation und Frequenz ist die Summe der

betreffenden Wahrscheinlichkeiten bei allen möglichen Übergängen $A \rightarrow B \rightarrow A$. Bei genügend großer Aufspaltung setzen sich also diese Übergänge unabhängig voneinander zusammen.

Diese unabhängige Zusammensetzung verschwindet, wenn die Aufspaltung mit der Linienbreite vergleichbar wird. Man muß dann statt (55) Ausdruck (54) benutzen, bei dem die Summe über m „Interferenz der Wahrscheinlichkeiten“ hervorruft. Liegt aber das aufspaltende Magnetfeld parallel zu der Polarisationsrichtung des einfallenden Lichtes e_j , so bleibt Ausdruck (55) auch bei beliebig kleiner Aufspaltung bestehen, was man folgendermaßen einsieht: Wenn als Indizes m, μ, μ' , die magnetischen Quantenzahlen der Komponenten von A und B benutzt werden, so ist $\mathcal{Q}_{A\mu Bm}$ parallel zu e_j , wenn $m = \mu$; senkrecht zu e_j , wenn $m \neq \mu$. Man überzeugt sich leicht, daß dann Ausdruck (54) identisch mit (55) wird, da das Produkt $(\mathcal{Q}_{Bm A\mu}, e_j)$ für $m \neq \mu$ verschwindet. In diesem Fall ist also die Wahrscheinlichkeitsverteilung im Resonanzlicht auch bei beliebig kleiner Aufspaltung die Summe der Wahrscheinlichkeiten bei den Übergängen zwischen den einzelnen Komponenten, wenn man diese als völlig getrennt annimmt. Dies ist im wesentlichen die Heisenbergsche Regel über die Intensität und Polarisation des Fluoreszenzlichtes bei Richtungs-entartung, welche aussagt, daß beide bis auf die Frequenz-aufspaltungen dieselben sind wie diejenigen, die bei der Aufspaltung durch ein Magnetfeld in Richtung des elektrischen Vektors des Lichtes entstehen.

Den Übergang zwischen Entartung und Aufspaltung bei allgemeiner Lage des Magnetfeldes untersuchen wir besser an dem einfacheren Fall, bei dem das Grundniveau A nicht entartet ist (z. B. Hg-Resonanzfluoreszenz). Seine magnetische Quantenzahl m ist 0. B ist dann in B_{-1}, B_0, B_{+1} aufgespalten. Bei verschwindendem Magnetfeld ist das Fluoreszenzlicht nach der Heisenbergschen Regel vollkommen polarisiert, wenn das einfallende Licht parallel e_j schwingt, und zwar derart, daß e_j' in der Ebene e_j, \mathcal{S}' liegt. Ist die Aufspaltung von B von der gleichen Größe oder klein gegen die Linienbreite, so tritt die von Hanle¹⁾ beobachtete Drehung

¹⁾ Vgl. das Zitat auf S. 25.

der Polarisations Ebene ein. Diese Größe ist stark abhängig von der relativen Lage des Magnetfeldes zu den Richtungen des ein- und ausgestrahlten Lichtes. Wir beschränken uns auf die Durchrechnung des Falles, wo das Magnetfeld (z -Achse) senkrecht zur Polarisationsrichtung des eingestrahlten Lichtes (x -Achse) liegt, und untersuchen das in der Richtung des Magnetfeldes ausgestrahlte Licht. Die Vektoren \mathfrak{D}_{AB-1} , \mathfrak{D}_{AB} , \mathfrak{D}_{AB+1} haben dann die Komponenten $(X, iX, 0)$, $(0, 0, Z)$, $(X, -iX, 0)$, die Vektoren \mathfrak{e}_j und \mathfrak{e}'_j haben die Komponenten $(1, 0, 0)$ bzw. $(\cos \vartheta, \sin \vartheta, 0)$. Wir erhalten dann nach (54)¹⁾:

$$W_{jj'}(\nu \nu' \mathfrak{E} \mathfrak{E}') = \frac{4\pi e^4}{h^4} \frac{s_j(\nu, \mathfrak{E}) s(\nu')}{(\gamma^2)^2 + (\nu - \nu')^2} \cdot \left| \frac{X^2 (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)}{i\gamma^B + \nu - \nu_A^B + \Delta} + \frac{X^2 (\cos \vartheta - i \sin \vartheta)}{i\gamma^B + \nu - \nu_A^B - \Delta} \right|^2$$

wobei

$$\nu_A^{B-1} = \nu_A^B + \Delta, \quad \nu_A^{B+1} = \nu_A^B - \Delta, \quad \gamma^{B-1} = \gamma^{B+1} = \gamma^B$$

gesetzt wurde.

$$\Delta = \frac{e}{m} \frac{H}{4\pi c} \quad (H \text{ ist die Stärke des Magnetfeldes}).$$

Dieser Ausdruck verschwindet, wenn $\Delta \neq 0$, für kein ϑ . Das ausgestrahlte Licht ist also nicht mehr völlig linear polarisiert. Wir finden jedoch ein Maximum und ein Minimum im Abstand

1) An diesem Ausdruck sieht man, wie wesentlich es ist, daß nicht die Wahrscheinlichkeiten, sondern ihre Amplituden sich additiv aus den Beiträgen der möglichen Übergänge zusammensetzen. Die beiden Terme zwischen den Absolutwertstrichen entsprechen den Beiträgen des Sprunges $B_{-1} - A$ bzw. $B_{+1} - A$. Würde man die Wahrscheinlichkeiten selbst addieren, also die Terme erst absolut quadrieren, so fiel die Abhängigkeit von ϑ überhaupt ganz weg. Das Licht wäre gar nicht linear polarisiert. Der eine Term würde, — wie hier nicht näher ausgeführt werden soll — links, der andere rechtszirkular polarisiertes Licht liefern. Das entspräche den Schlußfolgerungen, die man aus der strengen Bohrschen Theorie gewann, nach der sich das rechts- und linkszirkulare Licht von Atomen, die den Sprung $B_{-1} - A$ bzw. $B_{+1} - A$ machen, nicht kohärent zu einem linear polarisierten Strahl zusammensetzen kann. Hier addieren sich aber nicht die Wahrscheinlichkeiten der beiden Sprünge, sondern ihre Amplituden, wodurch ihr „kohärentes“ Zusammenwirken entsteht.

von $\pi/2$, so daß noch eine teilweise Polarisierung vorhanden ist. Die Lage dieser Extrema läßt sich bestimmen zu:

$$(56) \quad \operatorname{tg} 2 \vartheta = \frac{2 \Delta \gamma^B}{(\gamma^B)^2 + (\nu_A^B - \nu')^2 - \Delta^2}.$$

Da die Polarisationsrichtung bei fehlendem Magnetfeld in der Richtung $\vartheta = 0$ liegt, gibt dieser Ausdruck direkt den Winkel der Drehung der Polarisierungsebene. Die Drehung ist also noch von der ausgestrahlten Frequenz ν' abhängig und um so kleiner, je weiter diese von der Resonanzfrequenz entfernt ist. Um die tatsächlich beobachtete Drehung zu bekommen, müssen wir die eben berechnete über die Frequenzen ν' mitteln. Hierzu nehmen wir an, daß die Aufspaltung Δ klein gegen die Linienbreite γ^B ist, und daß die eingestrahlte Strahlungsdichte über die ganze Breite der Absorptionslinie konstant ist. Die relative Häufigkeit von ν' ist dann gleich

$$\frac{1}{\pi} \frac{\gamma^B}{(\gamma^B)^2 + (\nu_A^B - \nu')^2}$$

und wir erhalten für die mittlere Drehung

$$(57) \quad \operatorname{tg} 2 \bar{\vartheta} = \frac{\Delta}{\gamma^B}.$$

Der Winkel der Verdrehung ist also für kleine Δ gleich dem Verhältnis Larmorfrequenz : Verweilzeit.

VI. Resonanzfluoreszenz an mehreren Atomen

Aus den bisherigen Rechnungen läßt sich nichts über die Phasenbeziehungen zwischen ein- und ausgestrahltem Licht aussagen. Diese Phasenbeziehungen sind zwar an sich nicht beobachtbar, jedoch an einer eventuellen Kohärenz der Resonanzstrahlung nachzuweisen. Interferenzerscheinungen können aber nur dann auftreten, wenn mehrere Atome Resonanzlicht aussenden. Wir untersuchen daher im folgenden N gleichartige Atome, die sich im selben Strahlungsfeld befinden.

Unsere Methode der Feldquantelung hat aber den Nachteil, Interferenzerscheinungen durch Superposition zweier Wellen nicht wiedergeben zu können. Wenn sich zwei Wellen, die

wegen ihrer Phasenverschiebung notwendigerweise von verschiedenen Oszillatoren dargestellt werden, an einer Stelle des Feldes aufheben, so werden sie sich sicher an einer allerdings sehr entfernten Stelle verstärken, da zwei Wellen selbst mit dem kleinsten Frequenzunterschied, der noch möglich ist, — durch die periodischen Grenzbedingungen gibt es ja eine untere Grenze — sich nicht im ganzen Raum vernichten können. Alle Fragen nach der Wahrscheinlichkeit eines Quants bestimmter Frequenz und Richtung usw. beziehen sich aber auf den ganzen Raum, nämlich auf die stationären Zustände des Feldes. Daher werden die Interferenzwirkungen verschiedener Wellenzüge aufeinander nicht wiedergegeben, da diese nur in einem beschränkten, wenn auch sehr großen Raumgebiet Gültigkeit haben.

Unsere Methode wird also nie die Interferenzen unmittelbar wiedergeben, die durch das Zusammenwirken des reemittierten Lichtes mit der vorhandenen Strahlung entstehen (Dispersion). Hingegen lassen sich Schlüsse auf die Phasenbeziehungen ziehen, wenn wir das reemittierte Licht allein untersuchen, das in den Formeln bisher mit ν' , \mathcal{E}' , e_r' gekennzeichnet wurde. Es wird sich nämlich zeigen, daß bei N Atomen in den meisten Fällen das reemittierte Licht eine Wahrscheinlichkeitsverteilung proportional

$$(58) \quad \left| \sum_n e^{\frac{2\pi i}{\lambda}} \{(\mathcal{E}, \tau_n) + (\mathcal{E}', \tau_n)\} \right|^2$$

hat, welche sich der im vorigen Kapitel untersuchten Verteilung in der Strahlung eines einzigen Atoms überlagert. Hierbei ist \mathcal{E} die Richtung des eingestrahnten Lichtes, \mathcal{E}' die Richtung des reemittierten Lichtes, τ_n der Koordinatenvektor des n -ten Atommittelpunktes. In gewissen Richtungen wird also das reemittierte Licht von vornherein stärker und schwächer emittiert, ohne erst mit den vorhandenen Wellen zu interferieren. Formel (58) entspricht aber genau der Intensitätsverteilung einer Strahlung von N unabhängigen klassischen Oszillatoren an den Orten τ_n , die alle mit einer gleichen Phasenverschiebung gegen die einfallende Strahlung am Orte τ_n schwingen. Aus dieser Erkenntnis können wir, wenn der Faktor (58) bei der reemittierten Strahlung auftritt, mittelbar

weitschließen, daß sich das ein- und ausgesandte Licht, wie in der klassischen Theorie der Reflexion und Dispersion, zusammensetzt, die ja von dem Bilde der in Phase schwingenden Oszillatoren ausgeht.

Um dieses Problem in unser Rechenschema einzuordnen, betrachten wir die N Atome als ein System, dessen Resonanzterm N -fach entartet ist. Wählen wir die Strahlungsdichte so klein, daß immer nur höchstens eines der N Atome angeregt ist (das ist bei normalen Strahlungsdichten der Fall), so treten bei der Resonanzfluoreszenz eines Lichtquants folgende Zustände auf:

$$(A, n_1, \dots n_e, \dots n_o, \dots).$$

Alle Atome im Grundzustand, die Strahlung enthält die Resonanzfrequenz.

$$(B_n, n_1, \dots n_e - 1, \dots n_o, \dots).$$

Das n -te Atom angeregt, ein Lichtquant absorbiert,

$$(A, n_1, \dots n_e - 1, \dots n_o + 1, \dots).$$

Alle Atome im Grundzustand, ein Lichtquant emittiert. Wir haben also formal dasselbe Problem, wie die Resonanzfluoreszenz an einem Atome mit N -fach entartetem Resonanzniveau, das in den Formeln (43) bis (53) behandelt wurde. Wir brauchen also die Resultate nur von dort zu übernehmen. Bloß die Wechselwirkungselemente $H_{AB_n}^{(\pm e)}$ erfordern eine eigene Betrachtung. Die Wechselwirkungsfunktion ist die Summe der Funktionen (16) für die einzelnen Atome. Wir setzen also in (16), statt r_0 , r_n , das den Ort des n -ten Atommittelpunktes angibt und summieren über n . So erhalten wir:

$$H = -\frac{e}{c} \sum_n \sum_k \left\{ (r \mathfrak{A}_k^{(1)}) \cos \frac{2\pi}{\lambda_k} (\mathfrak{E}_k, r_n) + (r \mathfrak{A}_k^{(2)}) \sin \frac{2\pi}{\lambda_k} (\mathfrak{E}_k, r_n) \right\}.$$

Bei der Bildung der Matricelemente $H_{AB_n}^{(\pm e)}$ spielt bloß das n -te Glied eine Rolle, da die Eigenfunktionen des n -ten Atoms nur an der Stelle r_n wesentlich von Null verschieden sind, so daß sich die Matricelemente $H_{AB_n}^{(\pm e)}$ von den früheren nur dadurch unterscheiden, daß r_n an Stelle von r_0 steht. r_0 kommt

aber, wie Formel (20) zeigt, nur im Exponenten einer imaginären e -Potenz vor, so daß also alle $H_{ABn}^{(\pm e)}$ denselben absoluten Betrag haben, der dem Betrage des früheren Matrixelementes $H_{AB}^{(\pm e)}$ gleicht. Wir erhalten also unter Beachtung der Fußnote auf S. 34

$$(59) \quad H_{ABn}^{(\pm e)} = e^{+\frac{2\pi i}{\lambda_e}(\mathfrak{E}_e, \mathfrak{r}_n)} |H_{AB}^{(\pm e)}| e^{i\varphi_e}$$

wobei der Wert $|H_{AB}^{(\pm e)}|$ aus (20) zu entnehmen ist. Die Funktionen $F_{ABn}(\nu)$ haben für alle n denselben Wert, da die Abhängigkeit von n bei der Absolutquadrierung der Matrixelemente in (23) wegfällt.

Wir wollen schon hier andeuten, wie der Faktor (58) zustande kommt. Die Wahrscheinlichkeit $W_{\sigma\sigma}^e$ der Resonanzfluoreszenz eines Lichtquants der Art ρ in die Art σ an einem Atom ist nach (37a)

$$(60) \quad \frac{1}{\hbar^4} \left| \frac{H_{AB}^{*(-e)} H_{BA}^{*(o)}}{(i\Gamma^A - \nu_e + \nu_o)(i\gamma^B + \nu_o - \nu_A)} \right|^2.$$

Die Wahrscheinlichkeit desselben Prozesses an N Atomen ist aber nicht die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten, sondern das Quadrat der Summen der Einzelamplituden (da hier wieder die verschiedenen Wege zu ein und demselben Endzustand führen).

Bilden wir diese Summe, so erhalten wir aus (60), da der Nenner von (60) von n unabhängig ist — die Γ^A und γ^B bestehen ja aus den Funktionen $F_{ABn}(\nu)$ — nach (59), wenn wir $\lambda_e \cong \lambda_o \cong \lambda$ setzen

$$(61) \quad \left\{ \frac{1}{\hbar^4} \left| \sum_n e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \{(\mathfrak{E}_e, \mathfrak{r}_n) + (\mathfrak{E}_o, \mathfrak{r}_n)\}} \right|^2 \right. \\ \left. \left| \frac{|H_{AB}^{(-e)}| |H_{BA}^{(o)}|}{(i\Gamma^A - \nu_e + \nu_o)(i\gamma^B + \nu_o - \nu_A)} \right|^2 \right\}.$$

Es muß aber noch bewiesen werden, daß diese Betrachtungsweise hier berechtigt ist. Tatsächlich ist sie es auch nur dann, wenn die Atomabstände groß gegen die Wellenlänge λ sind und

in gewissen anderen Spezialfällen. Für die Anwendbarkeit der Rechnungen (43) bis (53) ist es nämlich noch zu zeigen, daß die Funktionen $\varphi_{nm}(\nu)$ für $n \neq m$ verschwinden. Es ist hier

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_{nm}(\nu) d\nu &= \sum_{\nu_\sigma = \nu}^{\nu + d\nu} H_{B_n A}^{(\sigma)} H_{B_m A}^{*(\sigma)} \\ &= \sum_{\nu_\sigma = \nu}^{\nu + d\nu} |H_{B A}^{(\sigma)}|^2 e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (\mathfrak{S}_\sigma, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m)} \\ &= \sum_{k, j} |H_{B A}^{(k, j)}|^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda_k} (\mathfrak{S}_k, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m) \\ &= \frac{1}{4\pi} F_{BA}(\nu) d\nu \int \cos \frac{2\pi}{\lambda} (\mathfrak{S}, \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m) dS. \end{aligned} \right.$$

Dieses Integral über alle Richtungen \mathfrak{S} verschwindet für $\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_m \gg \lambda$. Unsere Voraussetzung ist also erfüllt, wenn die Abstände der Atome viel größer als die Resonanzwellenlänge sind. Die Diagonalelemente φ_{nn} sind hier alle gleich und zwar nach (23):

$$\varphi_{nn} = F_{AB}(\nu) = \frac{\pi}{h^3} \gamma^B.$$

Wir erhalten als Absorptionswahrscheinlichkeit, falls die Strahlung $\bar{s}(\nu)$ sich über ein größeres Frequenzgebiet erstreckt, nach (50)

$$4\pi \gamma^A = 4\pi N \cdot F_{AB}(-\nu_A^B) = N \cdot \frac{8\pi^3 e^2}{3h^3} \bar{s}(\nu_A^B) |\mathfrak{D}_{AB}|^2.$$

Das ist das N -fache der Absorptionswahrscheinlichkeit eines Atoms.

Die Wahrscheinlichkeit $W_{\sigma\sigma}$, daß ein Lichtquant der Art ρ durch Resonanzfluoreszenz an N Atomen in einer der Art σ umgewandelt wird, ist mit Hilfe von (52):

$$(63) \quad W_{\sigma\sigma} = \frac{1}{h^4} \left| \sum_n \frac{H_{AB_n}^{(\rho)} H_{B_n A}^{*(\sigma)}}{(i\gamma^A + \nu_\sigma - \nu_\sigma)(i\gamma^{B_n} + \nu_\sigma - \nu_A^B)} \right|^2.$$

Dies ist aber identisch mit (61), da, wie schon dort bemerkt, alle γ^{B_n} gleich sind und den Wert γ^B haben. Die Summe über n ist hier nichts anderes, als die dort beschriebene Addition der Wahrscheinlichkeitsamplituden. Durch Vergleich

mit (60) ist somit gezeigt, daß die Intensitätsverteilung des Resonanzlichtes von N -Atomen durch den Faktor

$$\left| \sum_n e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}', \mathbf{r}_n)} \right|^2$$

aus der Intensitätsverteilung bei einem Atom hervorgeht. Die Resonanzstrahlung ist also bei Atomabständen, die größer gegen die Wellenlänge sind, so beschaffen, als ob sie eine definierte Phasenverschiebung gegen die einfallende Strahlung hätte.

Diese Überlegungen gelten nicht mehr, wenn die Atomabstände mit der Wellenlänge vergleichbar sind, da die φ_{nm} für $m \neq n$ nicht mehr verschwinden. Es ist aber trotzdem möglich, auch auf diesen Fall dieselbe Rechenmethode anzuwenden. Die Auswahl der stationären Zustände des Systems von N gleichartigen Atomen ist nämlich nicht eindeutig. Es besteht die Möglichkeit, innerhalb der N entarteten Zustände B_n , $n = 1 \dots N$, eine unitäre Transformation auszuführen. Ein auf diese Weise erzeugter Zustand B'_n , $n = 1 \dots N$, ist nicht mehr dadurch zu kennzeichnen, daß ein bestimmtes Atom angeregt ist. Die Transformation von den B_n auf die B'_n möge durch die Matrix U mit den Elementen $u_{nn'}$,

$$\sum_m u_{nm} u_{n'm}^* = \delta_{nn'},$$

hervorgerufen sein. Dann stehen, wie man sich leicht überzeugt, die neuen Matrixelemente $H_{AB_n}^{(\pm \varphi)}$ in folgender Beziehung zu den alten:

$$(64) \quad H_{AB_n}^{(\pm \varphi)} = \sum_m u_{nm} H_{AB_m}^{(\pm \varphi)}, \quad H_{B'_n A}^{(\pm \varphi)} = \sum_m u_{nm}^* H_{B_m A}^{(\pm \varphi)}.$$

Die Größen φ_{nm} werden gemäß ihrer Definition (47) nach dem Schema

$$\varphi'_{n'm'} = \sum_n u_{n'n} \varphi_{nm} u_{m'm}^*$$

transformiert, was wir auch in der Form

$$(65) \quad \Phi' = U \Phi U^{-1}$$

schreiben können, wobei Φ die Matrix φ_{nm} darstellt. Haben wir also eine Matrix U gefunden, die die gegebene Matrix Φ

auf Hauptachsen transformiert, so können wir mit ihrer Hilfe diejenigen stationären Zustände finden, auf die unsere Rechenmethode anwendbar ist.

Die Bedeutung dieser neuen Zustände tritt klar hervor, wenn man die zeitliche Ableitung der Wahrscheinlichkeit $W(B_n)$ eines Zustandes B_n berechnet. Es ist

$$\frac{\partial W(B_n)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_e |b_e^n|^2 = \sum_e b_e^n b_e^{*n} + b_e^{*n} b_e^n.$$

Wenn man für b_e^n Gl. (43 b) einsetzt und die folgenden Relationen¹⁾

$$(66) \quad \begin{cases} \frac{1}{h} \sum_e H_{AB_n}^{(-e)} b_e^n = \frac{\pi}{h^2} F_{AB_n}(-\nu_A^n) \cdot a \\ \frac{1}{h} \sum_\sigma H_{B_n A}^{(\sigma)} a_{\sigma\sigma} = \gamma^{B_n} \cdot b_e^n \end{cases}$$

benutzt, erhält man [vgl. a. a. O. Formel (28) ff.], wenn $W(A) = |a|^2$

$$\frac{\partial W(B_n)}{\partial t} = 4\pi \gamma_{B_n}^A W(A) - 4\pi \gamma^{B_n} W(B_n),$$

wenn man $\frac{\pi}{h^2} F_{AB_n}(-\nu_A^n) = \gamma_{B_n}^A$ setzt.

Daraus ersehen wir, daß die Zustände B_n unabhängig voneinander mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $4\pi \gamma_{B_n}^A$ aus A entstehen, wie die radioaktiven Zerfallsprodukte an einer Verzweigungsstelle der Reihe, und mit der Wahrscheinlichkeit $4\pi \gamma^{B_n}$ verschwinden und nach A zurückfallen. Die Relationen (66) gelten aber nur, wenn Φ Diagonalmatrix ist. Ist dies nicht der Fall, so läßt sich das „radioaktive Zerfallsgesetz“ nicht mehr aufstellen. Die Zustände, die dann durch B_n beschrieben werden, entstehen nicht mehr unabhängig voneinander aus dem Anfangszustand, es herrscht eine Kopplung zwischen ihnen. Man kann somit bei der Resonanzfluoreszenz an nahe benachbarten Atomen nicht mehr sagen, ein Lichtquant wird von einem Atom absorbiert und reemittiert, an Stelle des einen Atoms tritt der Zustand B_n' , an dem alle Atome „beteiligt“ sind.

1) Die erste Relation folgt nach Einsetzen von (49) aus (31), die zweite direkt aus (48).

Wie modifizieren sich dadurch die Resultate? Die Absorptionswahrscheinlichkeit (vgl. Formel (50))

$$4\pi I^A = 4\pi \sum_n F_{AB_n}(-\nu_A) = 4\pi \frac{1}{d\nu} \sum_{\nu_e = \nu_A^B}^{\nu_A + d\nu} \sum_n |H_{AB_n}^{(-e)}|^2.$$

(Hier ist die Definition von $F_{AB_n}(\nu)$, Formel (23), angewendet)

bleibt dieselbe wie bei großen Abständen, weil die Summe der Absolutquadrate gegen jede Transformation U invariant ist. Nicht so die Intensitätsverteilung im Resonanzlicht. Es wird nach (63) unter Benutzung von (64)

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} W_{e\sigma} &= \frac{1}{h^4} \frac{1}{(\gamma^A)^2 + (\nu_e - \nu_\sigma)^2} \\ &\cdot \left| \frac{\sum_m u_{nm}^* H_{AB_m}^{*(-e)} \cdot \sum_{m'} u_{nm'} H_{B_m'A}^{*(\sigma)}}{i\gamma^{B_n} + \nu_\sigma - \nu_A^B} \right|^2, \end{aligned} \right.$$

wobei die $\gamma^{B_n} = \pi \phi'_{nn}$, proportional zu den Eigenwerten der Matrix Φ sind. Dieser Ausdruck läßt im allgemeinen keine übersichtliche Auswertung zu. Wir sehen daran bloß, daß die resultierende Strahlung eine Überlagerung von N Komponenten mit den Linienbreiten γ^{B_n} ist. Die Zerlegung des Systems von N Atomen in die Zustände B'_n entspricht der klassischen Zerlegung eines Systems von N durch das Strahlungsfeld gekoppelten Oszillatoren in ungekoppelte Eigenschwingungen. Die dabei auftretende Frequenzaufspaltung ist sicher auch hier vorhanden; sie tritt jedoch in unseren Formeln deshalb nicht auf, weil diese von vornherein nicht imstande waren, die Verschiebung wiederzugeben, die auf der Koppelung mit dem Strahlungsfeld beruht.

Ausdruck (67) läßt sich in zwei speziellen Fällen weitgehendst auswerten. Einmal, wenn die Frequenz des eingestrahlten Lichtes außerhalb der Linienbreite von $B \rightarrow A$ liegt (aber innerhalb des Intervalls ϵ um ν_A^B , da sonst die Rechnung nicht anwendbar wäre), also auf dem Übergangsgebiet zur Dispersion; ferner dann, wenn die Atome so dicht gelagert sind, daß eine sehr große Anzahl auf einen Wellenlängen kubus fällt.

Um den ersten Fall zu diskutieren, nehmen wir an, daß $\nu_e = \nu_0$ die Frequenz des eingestrahnten Lichtquants sei und $(\nu_0 - \nu_A^B) > \gamma^{B_n}$ ist. Ausdruck (67) ist aber nur dann wesentlich von Null verschieden, wenn ν_σ ganz in der Nähe von $\nu_e = \nu_0$ liegt. Man kann also im Nenner an diesen Stellen γ^{B_n} neben $\nu_\sigma - \nu_A^B$ vernachlässigen, wodurch Ausdruck (67) die Form

$$W_{e\sigma} = \frac{1}{h^4} \frac{1}{[(\gamma^A)^2 + (\nu_\sigma - \nu_0)^2] [\nu_\sigma - \nu_A^B]^2} \cdot \left| \sum_n \sum_m u_{nm} H_{AB_n}^{*(-e)} \sum_{m'} u_{nm'} H_{B_{m'}A}^{*(\sigma)} \right|^2$$

erhält. Wegen der Orthogonalitätsrelationen der u_{nm} reduziert sich die Summe auf $\sum_n H_{AB_n}^{*(-e)} H_{B_nA}^{*(\sigma)}$, so daß dieser Ausdruck in den entsprechenden (63) für große Atomdistanzen übergeht, wenn man auch dort die Annahme macht, daß die Frequenz des eingestrahnten Lichtes ν_e von ν_A^B entfernt ist, so daß $\nu_\sigma - \nu_A^B$ groß gegen γ^{B_n} sein muß. Unter diesen Umständen ist also die Resonanzstrahlung so beschaffen, als ob die Atome auch bei kleinen Distanzen unabhängig mit einer festen Phasendifferenz gegen das einfallende Licht ausstrahlen. Die gegenseitigen Störungen der Atome, die durch ihre eigene Ausstrahlung hervorgerufen werden, verschwinden, wenn die Ausstrahlung nicht mehr mit der Eigenfrequenz übereinstimmt.

Liegen die Atome so eng, daß eine sehr große Anzahl auf einen Wellenlängen kubus fällt, so kompensieren sich die gegenseitigen Störungen derart, daß sich die resultierende Strahlung von der Strahlung eines Atoms wieder durch den Faktor

$$(68) \quad \left| \sum_n e^{\frac{2\pi i}{\lambda} (\mathfrak{E} + \mathfrak{E}', r_n)} \right|^2$$

unterscheidet, wie im folgenden gezeigt werden wird. Wir dürfen also auch hier wieder die Atome als unabhängige Resonatoren betrachten, die in einer definierten Phasenverschiebung gegen das einfallende Licht ausstrahlen. Die Atome müßten also Brechung und Reflexion der Resonanzfrequenz zeigen. Die Brechung kann experimentell nicht beobachtet werden, da

bei hohen Dichten die Absorption und Umwandlung in Wärmeenergie so groß ist, daß der Strahl nicht tief genug in das Material hineindringt. Hingegen ist eine selektive Reflexion des Resonanzlichtes von Wood an Quecksilberdampf bei hoher Dichte beobachtet worden.¹⁾

Wir rechnen der Einfachheit halber mit einer geradlinigen linearen Kette von $2N$ Atomen. Die Numerierung der Atome möge in der Mitte beginnen, positiv nach der einen, negativ nach der anderen Seite gezählt werden. Auf einer Wellenlänge sollen n_0 Atome liegen, wobei $1 \ll n_0 \ll N$. Die Gesamtlänge der Kette sei also groß gegen eine Wellenlänge. Die Entfernungen der Atome mögen als gleich groß angenommen werden. Da die Größen $\varphi_{mm'}$ nach (52a) nur von dem relativen Abstand $r_m - r_{m'}$ abhängen, so ist $\varphi_{mm'}$ nur von der Differenz $m - m'$ abhängig; wir schreiben daher: $\varphi_{m-m'}$, das nach (52a) für $m - m' \gg n_0$ gegen Null geht. Die Matrix Φ ist also — bis auf die ersten und letzten n_0 Zeilen — zyklisch. Die N Eigenwerte ergeben sich daher sofort zu

$$(69) \quad \Phi_m = \sum_{l=-N}^{+N} \varphi_l \cdot e^{\frac{2\pi i}{N} m \cdot l} \gamma_m^B = \frac{\pi}{h^2} \Phi_m.$$

Die Matrix U hat die Elemente $u_{lm} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi i}{N} l \cdot m}$. Durch diese Matrix sind die stationären Zustände gegeben, die unabhängig voneinander Lichtquanten absorbieren und emittieren können. Da $|u_{lm}|^2$ für alle l, m gleich ist, sieht man, daß an diesen Zuständen alle Atome gleichberechtigt beteiligt sind.²⁾ Der Ausdruck (67) wird dann zu:

$$W_{e\sigma} = \frac{1}{h^4} \frac{1}{(\gamma^A)^2 + (\nu_e - \nu_\sigma)^2} \cdot \left| \frac{1}{N} \sum_n \sum_m \sum_{m'} e^{\frac{2\pi i}{N} (m' - m)n} H_{AB_m}^{*(-e)} H_{B_{m'}A}^{(\sigma)} \right|^2.$$

1) R. W. Wood, Phys. Ztschr. 10. S. 425. 1909; 13. S. 353. 1912; Phil. Mag. 32. S. 329. 1916; 44. S. 1105. 1922.

2) Dies beruht auch darauf, daß wir eine unendlich breite ebene Welle einstrahlen. Wäre das eingestrahelte Licht nur auf einen kleinen Ort beschränkt, so würden natürlich nur die dort befindlichen Atome absorbieren.

Setzt man hier (59) ein, so erhält man:

$$W_{e\sigma} = \frac{1}{h^4} \frac{|H_{AB}^{(-\rho)}|^2 |H_{BA}^{(\sigma)}|^2}{(\gamma_A)^2 + (\nu_e - \nu_\sigma)^2} \cdot \left| \frac{1}{N} \sum_n \frac{\sum_m \sum_{m'} e^{\frac{2\pi i}{N}(m'-m)n} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{(\mathfrak{E}, \tau_m) + (\mathfrak{E}', \tau_{m'})\}}}{i\gamma_n^B + \nu_\sigma - \nu_A^B} \right|^2.$$

Der Ausdruck zwischen den Absolutquadratstrichen läßt sich in folgender Form schreiben;

$$\sum_m e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{(\mathfrak{E}, \tau_m) + (\mathfrak{E}', \tau_{m'})\}} \cdot \frac{1}{N} \sum_m \frac{1}{\gamma_n^B + \nu_\sigma - \nu_A^B} + \frac{1}{N} \sum_n \sum_m \sum_{\substack{m' \\ m \neq m'}} e^{\frac{2\pi i}{N}(m-m')n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{(\mathfrak{E}, \tau_m) + (\mathfrak{E}', \tau_{m'})\}}}{i\gamma_n^B + \nu_\sigma - \nu_A^B}.$$

Der zweite Term ist aber gegen den ersten zu vernachlässigen. Die Summe über m und m' verschwindet nämlich sicher, solange

$n > n_0$ ist. Dann ist $e^{\frac{2\pi i}{N}(m-m')n}$ gegenüber $e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{(\mathfrak{E}, \tau_m) + (\mathfrak{E}', \tau_{m'})\}}$ sehr rasch veränderlich. Es bleibt also vom zweiten Term nur

noch $\sum_{n=-n_0}^{+n_0}$ bestehen. Dieser Anteil ist aber wegen $n_0 \ll N$ gegen den ersten Term zu vernachlässigen.

Wir erhalten also

$$W_{e\sigma} = \frac{1}{h^4} \frac{|H_{AB}^{(-\rho)}|^2 |H_{BA}^{(\sigma)}|^2}{(\gamma_A)^2 + (\nu_e - \nu_\sigma)^2} \cdot \left| \sum_n e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}', \tau_n)} \right|^2 \left| \frac{1}{N} \sum_n \frac{1}{i\gamma_n^B + \nu_\sigma - \nu_A^B} \right|^2.$$

Der letzte Faktor¹⁾ gibt die Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit von der Frequenz ν_σ an, also die Emissionslinienform, die sich aber nicht mehr auf die Linienform eines einzelnen Atoms

1) Man könnte glauben, daß die Summe für $\nu_\sigma = \nu_A^B$ divergiert, da nach (69) Φ_m bei großem m und großem N gegen Null geht. Es läßt sich aber zeigen, daß $\frac{1}{N} \sum_n \frac{1}{\Phi_n}$ konvergent ist.

reduzieren läßt [vgl. (37a)]. In nicht zu großer Nähe von ν_A^B läßt er sich jedoch näherungsweise durch $\frac{1}{(\bar{\gamma}^B)^2 + (\nu_0 - \nu_A^B)^2}$ darstellen, wobei $\bar{\gamma}^B$ der Mittelwert von γ^{B_n} ist. In der Mitte der Linie ist der Intensitätsverlauf durch $\frac{1}{(\bar{\gamma}^B)^2 + (\nu_0 - \nu_A^B)^2}$ approximiert, wobei $\frac{1}{\bar{\gamma}^B}$ der Mittelwert von $\frac{1}{\gamma^{B_n}}$ ist.

Für die Richtungsabhängigkeit der Resonanz ist jedoch nur der erste und zweite Faktor maßgeblich. Der erste Faktor liefert die Intensitätsverteilung, die bei der Resonanzfrequenz an einem Atom auftritt [vgl. (37a)]. Der zweite Faktor liefert die an (68) beschriebenen Interferenzerscheinungen. Dasselbe Resultat erhält man in etwas umständlicherer Weise für eine räumliche Gitteranordnung der Atome.

Hrn. Prof. Born, sowie Hrn. Prof. Franck und Hrn. Prof. E. Wigner danke ich herzlichst für viele fördernde Unterstützungen und Diskussionen.

Göttingen, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 8. Februar 1931)

Strahlung von Antennen unter dem Einfluß der Erdbodeneigenschaften

D. Strahlungsmessungen mit Antennen

Von M. J. O. Strutt

[Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken,
Eindhoven (Holland)]

(Mit 15 Figuren)

I. Einleitung

Im Anschluß an früher veröffentlichte theoretische Erwägungen¹⁾ über den Einfluß der Erdbodeneigenschaften auf die Strahlung von Antennen sind in diesem Laboratorium eine Reihe von Messungen²⁾ ausgeführt worden. Diese Messungen nahmen den Sommer von 1929 und das Frühjahr 1930 in Anspruch. Sie sind jetzt noch nicht völlig abgeschlossen. Der verregnete Sommer 1930 hat ihre Fortsetzung um ein Jahr verzögert. Ich möchte aber hier jene Ergebnisse mitteilen, welche sich aus den bis jetzt ausgeführten Messungen einwandfrei feststellen lassen.

Das Ziel unserer Messungen war zweifach. Erstens sollten die Erdbodeneigenschaften für eine bestimmte kurze Wellenlänge gemessen werden. Auf Grund dieser Messungen kann man dann unter Heranziehung der Theorie die Strahlungseigenschaften von Antennen berechnen. Zweites Ziel der Messungen war, diese berechneten Strahlungseigenschaften zu kontrollieren. Die erwähnten Strahlungseigenschaften zerfallen der Hauptsache nach in zwei Gruppen: Raumstrahlungsdiagramme und Strahlungsfortpflanzung entlang der Erdoberfläche. Durch die Wirkung der Heavisideschicht sind beide Strahlungseigenschaften für die Nachrichtenübermittlung auf drahtlosem Wege gleich wichtig. Wir haben über beide Messungen ausgeführt.

II. Bisherige Messungen

Es liegt die Frage nahe, ob nicht durch die bekannten und teilweise sehr wichtigen Messungen anderer Forscher genügend Licht auf diese Probleme geworfen wird. Bei der Besprechung dieser Frage werden wir von selbst auf eine andere geführt: welche Wellenlänge soll zur Messung verwendet werden? Die früher veröffentlichten (teilweise gleichzeitig mit oder sogar nach unseren Messungen ausgeführten) Versuche lassen sich in zwei große Gruppen einteilen.

Die erste Gruppe arbeitet mit Wellenlängen von 10 bis einige Hundert Meter. Die Strahlungsdiagramme werden mittels Luftballons³⁾ oder Flugzeugen⁴⁾ gemessen. Abgesehen davon, daß solche Messungen den Aufwand großer Mittel erfordern, lassen die bisher bekanntgewordenen Messungen doch nicht zu, alle technisch wichtigen Raumstrahlungseigenschaften von Antennen festzustellen. Dies liegt teilweise daran, daß zur Zeit ihrer Ausführung die Theorie noch nicht genügend ausgearbeitet war, teilweise aber auch daran, daß die Messungen einen mehr qualitativen Charakter tragen. Denn bei keiner der erwähnten Messungen waren, soviel mir bekannt, mit einer unabhängigen Methode die Bodeneigenschaften bestimmt. Schon aus diesem Grunde müssen jene, die im Kurzwellengebiet ausgeführt wurden, als orientierend bezeichnet werden.

Die zweite Gruppe der bisher veröffentlichten Strahlungsmessungen arbeitet mit Wellen von einigen Metern, wobei die Meßmittel einfacher sind als bei der ersten Gruppe. Jene Messungen dieser zweiten Gruppe, die Raumstrahlungsdiagramme in einer vertikalen Ebene ergeben, können aber ausnahmslos auch bloß als qualitativ orientierend angesehen werden und zwar aus folgendem Grunde. Die Theorie führt zu einfachen Strahlungsformeln, in Abhängigkeit der Bodeneigenschaften, nur für Abstände von vielen (z. B. 10) Wellenlängen. Die besten der erwähnten Messungen⁵⁾ sind aber im Abstände von nur wenigen Wellenlängen vom Sender ausgeführt worden (z. B. 7,50 m Abstand bei 2,60 m Wellenlänge). Für diese kurzen Abstände sind mir bisher keine Formeln bekannt. Und auch wenn solche Formeln aufgestellt würden, wäre ihre Abhängigkeit von den Erdbodeneigenschaften eine so verwickelte, daß man keinen sicheren Schluß aus Messungen dieser Art ziehen könnte. Hinzu kommt noch, daß bei den

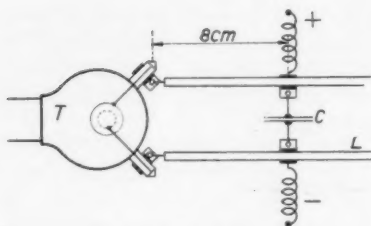
erwähnten Messungen oft nicht genügende Vorsicht beobachtet wurde, um mit Sicherheit jede Strahlung des Senders außer jener von der *Sendeanenne* auszuschließen. In der *horizontalen* Ebene, weit (etwa 2 Wellenlängen) von der Erde, sind Messungen dieser Art veröffentlicht worden⁶⁾, welche die erwähnten Züge nicht aufweisen. Diese letztgenannten Messungen haben auch genügende Übereinstimmung mit der Theorie ergeben.

Wir haben eine Wellenlänge von 1,42 m benutzt, meines Wissens die kürzeste, die bisher für *quantitative* Antennenmessungen verwendet wurde. Mit dieser Wellenlänge ist es unter Benutzung von Masten möglich, in mehr als zehn Wellenlängen Abstand Raumstrahlungsdiagramme aufzunehmen in einer vertikalen Ebene. Die meßtechnischen Schwierigkeiten, mit dieser kurzen Welle verbunden, wurden alle erfolgreich beseitigt, wie nachfolgend beschrieben.

III. Meßapparat

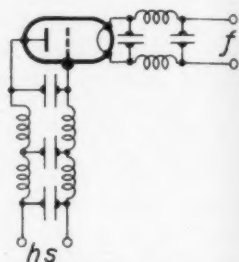
Zu der hier beschriebenen Apparatur sind wir durch mehrmonatliche Vorversuche geführt worden. Ich werde nicht alle Vorversuche erwähnen, sondern in der Hauptsache die fertige Apparatur beschreiben. Nachdem feststand, daß wir mit einer Wellenlänge von etwa 1 m arbeiten würden (kürzere Wellen würden Terrainunebenheiten zu sehr hervortreten lassen), haben wir versucht, diese Welle mit der größtmöglichen Konstanz von Länge und Intensität und der größtmöglichen Energie herzustellen. Zunächst haben wir die Barkhausenschaltung erprobt. Über die Ergebnisse, welche diese Messungen hatten, ist bereits in diesen Annalen berichtet worden.⁷⁾ Die Wellenlänge war zwar praktisch unabhängig von der positiven Gitterspannung, aber sehr abhängig vom Glühstrom. Die Intensität war genügend für Antennenmessungen. Da die Wellenlänge sich aber bei stundenlangen Messungen nur durch öfteres Nachregeln konstant halten ließ, was im Laboratorium keine, aber außen große Schwierigkeiten bereitet, haben wir die Barkhausenschaltung verlassen und weiterhin mit positiver Anode in der üblichen Rückkopplungsschaltung gearbeitet.⁸⁾ Die Fig. 1 zeigt den Schwingungskreis. Die Röhre wurde eigens für unsere Messungen in unserer Proberöhrenwerkstätte angefertigt. Der Durchgriff hat einen ganz bestimmten Wert, der für starkes Oszillieren auf 1,4 m Wellenlänge unerlässlich ist.

Anode und Gitter sind an zwei Hörner herausgeführt und an zwei etwa 8 cm lange Kupferrohre (Durchmesser 1 cm; Abstand 5 cm) angeschlossen. Diese Kupferrohre sind dann über einen $300\text{ }\mu\mu\text{-F}$ -Dübelierkondensator kurzgeschlossen. An diesem Kondensator wird die Spannung (etwa 400 Volt) angeschlossen über einer Reihe von Drosselspulen und Kondensatoren (Schema in Fig. 2). Die Drosselspulen sind auf 1,4 m Wellenlänge abgestimmt. Durch (unveröffentlichte) Messungen des



Schwingungskreis zur
Erzeugung von 1,42 m
Wellenlänge

Fig. 1



Drosselketten zur Abschi-
rmung der h. f. Schwingung
von den Zuleitungsschnüren

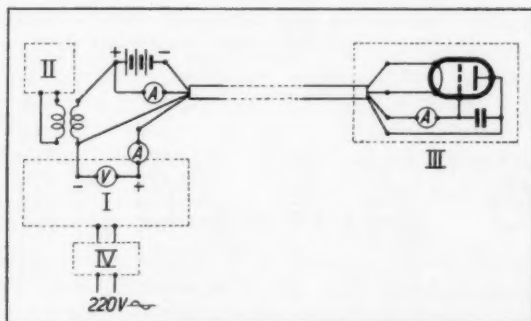
Fig. 2

Verf. in diesem Laboratorium hat sich ergeben, daß die Grundwellenlänge einer Spule, wenn die Länge größer als etwa 10 mal der Durchmesser ist, etwa 1,2 mal die aufgewickelte Drahtlänge beträgt. Wicklungsschritt und sonstige Daten ändern dies sehr wenig. Über den Blockkondensator hinaus sind die zwei erwähnten Kupferrohre um ein Viertel Wellenlänge verlängert und sie tragen am Ende einen Drehkopf (Fig. 3), mit Hilfe derer zwei Antennen in allen Polarisationsrichtungen drehbar an die Rohre angeschlossen werden können. Die gesamte Strahlungsenergie betrug bei einem Antennenstrom von etwa 50 mA und Strahlungswiderstand von etwa 50 Ohm insgesamt etwa 0,1 Watt. Mit der beschriebenen Abschirmung durch Drosselspulen und Kondensatoren haben wir erreicht, daß die Spannungszuführungskabel und -Schnüre nicht hochfrequent erregt werden. Es erwies sich aber für gewisse Messungen notwendig (vgl. unten), den ganzen Sender in eine geerdete Kupferhülle einzubauen, aus der nur der Antennen-



Gesamtbild des durch Kupferhülle abgeschirmten Senders; über der Senderöhre: Thermokreuz zur Intensitätsmessung

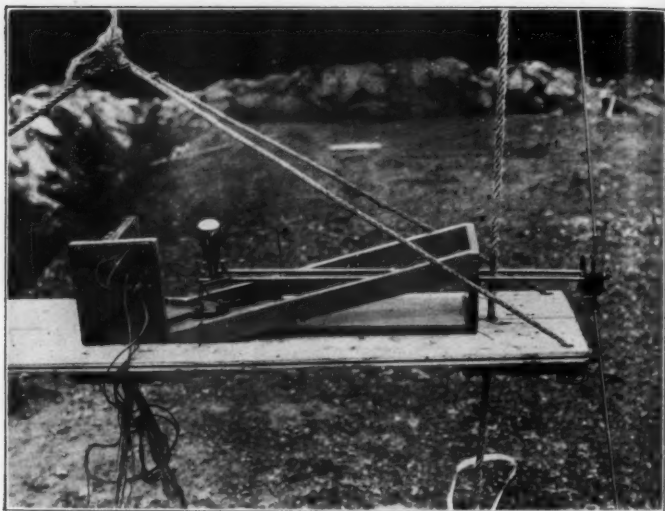
Fig. 3



Schema des Senders

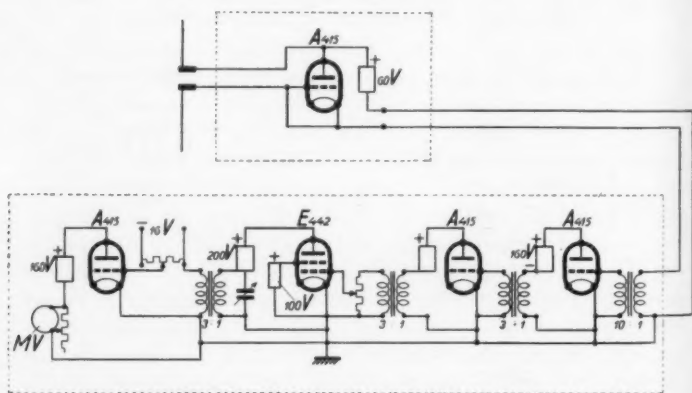
- I Gleichrichter;
- II Stimmgabelgenerator 435 Hz;
- III Senderöhre;
- IV Spannungsregler.

Fig. 4



Detektorröhre mit Antennen und Drosselketten

Fig. 5



Schema des Röhrendetektors nebst Verstärker und Röhrenvoltmeter für 435 Hz. Über den Röhren: Angabe der verwendeten Philpstypen. Glüh- und Gitterspannungen sind fortgelassen

Fig. 6

drehkopf nebst Antennen herausragen. Fig. 3 zeigt den ganzen Sender (Schema Fig. 4). Der Empfänger (Röhrendetektor) war dem Sender praktisch gleichgebaut (Fig. 5), nur mit einer anderen Röhre versehen und an einen Verstärker (Fig. 6) angeschlossen.

Durch Vorversuche haben wir gefunden, daß die günstigste Anodenspannung für den Röhrendetektor in unserem Falle etwa + 60 Volt war, während die normale Anodenspannung etwa 150 Volt ist. Die günstigste Anodenspannung ist von der Signalstärke abhängig. Bei sehr starkem Signal (z. B. Sender und Empfänger in einem Zimmer) trat Detektorwirkung ohne Anodenspannung in der angegebenen Schaltung auf und war dann sogar stärker als mit Anodenspannung.

Der Verstärker hatte vor der letzten Stufe (Schirmgitterröhre) noch ein Potentiometer, um den Ausschlag des Röhrenvoltmeters bequem regeln zu können. Die letzte Stufe war auf 435 Hz abgestimmt. Die ganze Meßvorrichtung funktioniert folgendermaßen. Der Sender schickt ein Signal, das mit 435 Hz moduliert ist, in den Äther. Der Detektor (Fig. 5) siebt die 435 Hz heraus und der Verstärker (Fig. 6) gibt diese 435 Hz verstärkt an das Röhrenvoltmeter durch. Indem wir ausgewählte Röhren benutzten, gelang es, diese gesamte Apparatur während mehrerer Stunden konstant zu halten. Ich erwähne, daß sämtliche Anoden- und Gitterspannungen von Gleichrichtern geliefert wurden. Die Glühspannungen wurden von Akkumulatoren bezogen. Die erwähnten Gleichrichter wurden vom Lichtnetz (220 Volt; 50 Hz) gespeist, dessen Spannung mit Hilfe besonders vorgeschalteter (statistischer) Spannungsregler konstant gehalten wurde. Dieses Verfahren erwies sich als einfacher und in bezug auf Konstanz zuverlässiger als das Beziehen aller Spannungen von Akkumulatoren.

IV. Prüfung der Meßapparatur

Der Sender wurde an einem Holzgestell aufgehängt, wodurch die Antennenhöhe über der Erde leicht während der Messung variiert werden konnte. Der Empfänger wurde an einem 20 m hohen Holzmast aufgehängt.

Wir haben zunächst mit Sender und Empfänger auf gleicher Höhe, etwa 1 m über dem Boden, die Empfangsstärke gemessen (Ausschlag des Röhrenvoltmeters von Fig. 6) bei kon-

stanter Senderstärke mit und ohne Sendeantenne und einmal mit, dann ohne Empfangsantenne. Die Senderstärke wurde mit einem unmittelbar über der Schwingröhre (Fig. 3) angeordneten Thermokreuz gemessen. Relativ ergaben sich die Ausschläge in Skalenteilen des Röhrenvoltmeters (Fig. 6):

Mit Sendeantenne und mit Empfangsantenne	100
„ „ „ ohne „	etwa 1
ohne „ „ „	1
„ „ „ mit „	1
Sender ausgeschaltet	1

Hierbei war um den Sender herum noch keine Kupferhülle gebaut. Wir wiederholten den gleichen Versuch aber jetzt mit dem Empfänger in etwa 12 m Höhe. Das Ergebnis war:

Mit Sendeantenne und mit Empfangsantenne	100
„ „ „ ohne „	etwa 1
ohne „ „ „	1
„ „ „ mit „	80
Sender ausgeschaltet	1

Hierdurch war festgestellt, daß der Empfänger tatsächlich nur auf den Empfangsantennen arbeitete. Der Sender arbeitete in der horizontalen Ebene und in einer Richtung senkrecht zur Sendeantenne nur auf der Antenne. Als wir dann aber den Sender drehten und in einer horizontalen Ebene in der Verlängerung der Sendeantenne maßen, fanden wir ein Ergebnis, ungefähr wie das zweite oben ausgeführte. Hierdurch war folgendes klar: Der an der Schwingröhre angeschlossene Schwingungskreis besitzt Eigenschaften eines vertikalen magnetischen Dipoles. Daher, daß er in einer Richtung, die mit der Horizontalen einen größeren Winkel bildet, viel mehr stört als in der horizontalen Ebene.¹⁾ Zugleich wirkt offenbar die Senderröhre mit Anschlüssen noch einigermaßen als horizontaler magnetischer Dipol (Spule mit horizontaler Achse). Daher das Ergebnis des dritten erwähnten Versuches. Durch Abschirmen des Senders mittels einer geerdeten Kupferhülle haben wir dann in allen Strahlungsrichtungen Ergebnisse wie das erste oben angeführte erzielt.

Nachdem die Abschirmungsfrage erledigt war, kam die quantitative Eichung des Empfängers an die Reihe. Die Sendestärke wurde durch Glühstromregelung verändert. Vor-

her war sorgfältig nachgeprüft worden, daß die Wellenlänge hierbei nicht meßbar (weniger als 0,5 Proz.) verändert, was um so bemerkenswerter ist, als sich beim Herunterdrehen des Glühstromes die Intensität mehrmals auf und ab bewegt (mehrere Schwingungsgebiete). Über diese Verhältnisse hoffe ich noch an anderer Stelle zu berichten. Als relatives, quantitatives Maß für die Senderstärke wurde der im obenerwähnten Thermokreuz von der Schwingröhre induzierte Strom benutzt. Dieser Strom wurde aus der Gleichstromeichkurve des Thermokreuzes abgelesen. In diesem Verfahren steckt wesentlich nur die Annahme, daß die Thermospannung mit dem (Quadrate

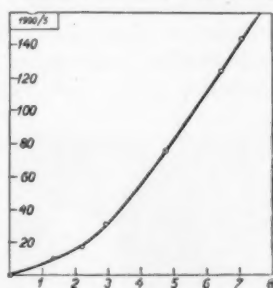


Fig. 7

Eichkurve
des Empfängers
Vertikal: Ausschlag des
Röhrenvoltmeters
(Fig. 6).
Horizontal: Quadrat der
Stromstärke im Ther-
mokreuz über der
Senderröhre (Fig. 3)

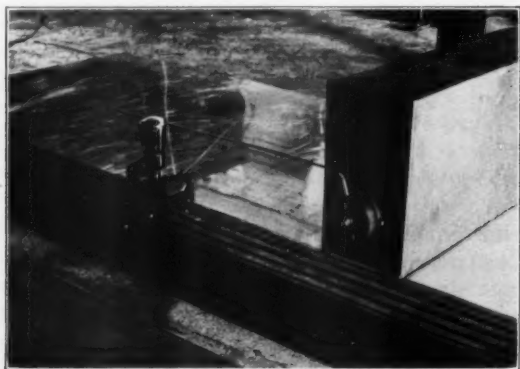
der Stromstärke mal Widerstand) bei Gleichstrom ebenso zusammenhängt wie bei 1,4 m Wellenlänge. Bis 15 m Wellenlänge herab ist durch von uns ausgeführte Messungen diese Annahme quantitativ⁹⁾, darunter durch Verwendung verschiedener Thermokreuze qualitativ geprüft. Außerdem sehe ich keinen Widerlegungsgrund. Wir haben nun die Empfangsstärke (Ausschlag des Röhrenvoltmeters) gegen die Senderstärke (Quadrat des Wechselstromes im Thermokreuz) abgetragen (Fig. 7). Diese Kurve wurde zu Beginn und am Ende jeder Meßreihe nachgeprüft. Nur jene Messungen wurden quantitativ verwendet, wobei sie nicht verändert war.

Schließlich haben wir geprüft, inwieweit Nachbargegenstände die Aussendung und den Empfang der kurzen Welle störten. Hin- und Herlaufen einer Versuchsperson in etwa 5 m Abstand von der Sendeantenne (nicht nur zwischen Sender und Empfänger) ergab bei Aufstellung des Empfängers in der gleichen Horizontalebene wie der Sender, starke Empfangs-

variationen.¹⁰⁾ Bei Aufstellung des Empfängers in etwa 10 m Höhe und der Versuchsperson etwa 5 m seitlich vom Sender war kein Einfluß vorhanden. Wir haben auch die Schnur vom Empfänger zum Verstärker so geführt, daß sich kein merklicher Einfluß auf die Empfangsantenne ergab. Beim Holzmast, Aufzugsvorrichtung usw. waren absichtlich Metallteile tunlichst vermieden worden. Nach vielen Vorversuchen fanden wir, daß der Empfangsausschlag innerhalb etwa 1 Proz. nicht mehr von zufälligen Anordnungen beeinflusst wurde.

V. Stromverteilung entlang der Sendeantenne

Da der Antennendrehkopf gerade um eine Viertel Wellenlänge vom Blockkondensator der Hochspannungszuleitung entfernt ist, während dieser Kondensator selber sich in einem



Meßvorrichtung zur Bestimmung der Spannungsverteilung entlang der Sendeantenne

Hintergrund: Sender mit horizontaler Sendeantenne

Vordergrund: Balken mit Quecksilberrinnen und verschiebbarer Detektor nebst Tastdraht für das Feld der Antenne

Fig. 8

Strombauch der hochfrequenten Schwingung befindet, wird der Drehkopf sich in einem Spannungsbauch befinden. Bei Anschluß einer Antenne, die eine halbe Wellenlänge lang ist, am Drehkopf, wird in der Mitte der Antenne ein Spannungs-

knoten, am Ende wieder ein Spannungsbauch fallen. In der Mitte der Antenne wird sich ein Strombauch befinden.

Wir haben diese Verhältnisse folgendermaßen kontrolliert. Die Sendeantenne wurde parallel in etwa 10 cm Abstand über dem sorgfältig geebneten Erdboden angeordnet und in der obenerwähnten Weise hochfrequent gespeist. Ein Balken von $(5 \cdot 10) \text{ cm}^2$ Querschnitt und 1,5 m Länge ist an einer Seite mit fünf parallelen, etwa 3 cm tiefen und 0,5 cm breiten Längsrinnen versehen worden. In den zwei äußeren Furchen passen genau zwei Ebonitplatten, die durch eine Querplatte zu einem Trägertisch verbunden sind (Fig. 8). In den mittleren drei Furchen wurde Quecksilber gegossen. Auf dem Ebonitläufer ist eine Detektorröhre in der Schaltung von Fig. 6 angeordnet. Die drei Gleichspannungszufuhren (4 Volt Glühspannung und + 60 Volt Anodenspannung) ragen in die Quecksilberfurchen hinein. Außerdem ist am Gitter der Detektorröhre ein etwa 10 cm langer Kupferdraht angeordnet, dessen freie Spitze sich in etwa 1,5 cm Entfernung von der Antenne befindet. Der Balken wird parallel zur Antenne gestellt und die Spitze tastet, wenn der Läufer an einem Faden dem Balken entlang gezogen wird, gewissermaßen die Spannung zwischen der Antenne und der Erde ab, während das Feld durch die Meßapparatur möglichst wenig gestört wird.

Die auf diese Weise gemessene Spannungsverteilung entlang der Antenne findet man in Fig. 9. Links befindet sich der Antennendrehkopf, rechts das freie Antennenende. Die erwartete Spannungsverteilung tritt auch wirklich annähernd auf. Auffallend ist, daß die Spannung am freien Antennenende größer ist als am Ende, das an der Lecherbrücke sitzt. Dieses Verhalten haben wir auch bei anderen Spannungsverteilungsmessungen oft feststellen können.

Über andere Messungen, mit der beschriebenen Vorrichtung über die Spannungsverteilung entlang Antennen ausgeführt, hoffe ich noch zu berichten.

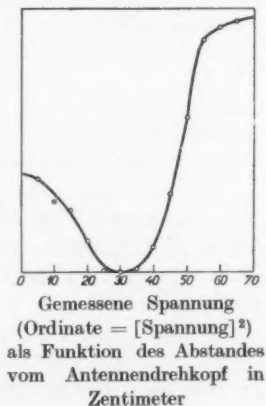


Fig. 9

VI. Reflexionsmessungen

Ziel der Messungen, die in diesem Abschnitt beschrieben werden, war, die Erdbodeneigenschaften für 1,42 m Wellenlänge direkt zu messen. Das Prinzip der Messung war folgendes. Man nehme den Empfänger (ebenso wie der Sender mit *horizontaler* Antenne versehen) in großer Höhe (etwa 15 m) über der Erde ortsfest an und verändere die Höhe der Sendeantenne über der Erde. Die Empfangsintensität zeigt Maxima und Minima als Funktion dieser Höhe. Man sieht dies leicht ein, durch Anwendung des nachfolgenden Satzes, der kurz das Ergebnis einiger früher veröffentlichten theoretischen Überlegungen zusammenfaßt.

In großem Abstand von der Sendeantenne setzt sich die Empfangsstärke aus zwei Strahlen zusammen, dem direkt vom Sender herrührenden und dem nach elementaren optischen Gesetzen einmal vom Erdboden reflektierten.

Je nachdem nun der reflektierte Strahl den direkten unterstützt oder diesem entgegenarbeitet, zeigt die Empfangsstärke ein Maximum oder ein Minimum. Die Theorie (vgl. Anhang) ergibt für die Empfangsintensität bis auf einen gleichgültigen Faktor:

$$(1) \quad |e^2| = 1 + |F|^2 + 2 F_1 \cos 2 \delta \gamma + 2 F_2 \sin 2 \delta \gamma.$$

Hierbei ist γ der Kosinus des Winkels, den die Verbindungslinie Sender-Empfänger mit der vertikalen Richtung einschließt, $\delta = 2\pi d/\lambda$, d die Höhe der Sendeantenne (horizontal polarisiert) über der Erde, λ die Wellenlänge, während der Reflexkoeffizient F die Bodeneigenschaften enthält:

$$(2) \quad F = \frac{\gamma - \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}}{\gamma + \sqrt{n^2 - 1 + \gamma^2}} = F_1 + F_2 \sqrt{-1}.$$

$$(3) \quad n^2 = \varepsilon - 6 \cdot 10^{12} \sigma \lambda \sqrt{-1},$$

ε Dielektrische Konstante der Erde.
 σ Leitfähigkeit der Erde in EME.
 λ Wellenlänge in Meter.

Wenn wir die Empfangsintensität als Funktion der Antennenhöhe d über der Erde messen, können wir aus dem Wert des Maximums $|e^2_{\max}|$ und des Minimums $|e^2_{\min}|$ den Re-

flexionskoeffizienten F bestimmen, der die Bodeneigenschaften enthält:

$$(4) \quad |F| = \frac{|e_{\max}^2| + |e_{\min}^2|}{|e_{\max}^2| - |e_{\min}^2|} - \sqrt{\left(\frac{|e_{\max}^2| + |e_{\min}^2|}{|e_{\max}^2| - |e_{\min}^2|} \right)^2 - 1}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel ist bestimmt durch die physikalische Forderung, daß $|F| \leq 1$ ist.

Wie bereits oben erwähnt, wurde die Sendeantenne zu diesen Messungen horizontal gewählt, und zwar weil dann die Antennenhöhe d möglichst genau festliegt, während außerdem doch die Antennenlänge (wie in unserem Fall geschehen) zu $\lambda/2$ gewählt werden kann, was der Intensität zugute kommt.

Es ist notwendig, den Strahlungswinkel $\arccos \gamma$ zu wählen. Hierzu ist ein theoretischer Befund herangezogen worden¹¹⁾, der lautet, daß bei Höhen d von der Ordnung von $\lambda/2$ und bei Abständen des Empfängers vom Sender von etwa 10λ der Fehler, der in der Näherung (1) steckt, möglichst klein wird, wenn $\arccos \gamma$ in der Nähe von 1 liegt. Dies ist aus folgender Tabelle zu ersehen (Ann. d. Phys. 4. S. 14. 1929 entnommen):

Tabelle 1

Strahlung eines horizontalen elektrischen Dipols in der Höhe $d = \lambda/4$ über der Erde, in einer senkrechten Ebene senkrecht zur Dipolachse; G_1 und G_2 Absolutbeträge der relativen Empfangsamplitude in konstanter Entfernung 10λ erste bzw. zweite Näherung; $\gamma = \cos$ des Winkels, den die Richtung Sender-Empfänger mit der vertikalen bildet

γ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
G_2	0,0300	0,3134	0,5831	0,8122	0,999 ⁹	1,1457
G_1	0,0000	0,3148	0,5880	0,8180	1,0046	1,1488
$G_2 - G_1$	+ 0,0300	- 0,0014	- 0,0049	- 0,0058	- 0,0054	- 0,0031

γ	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
G_2	1,2534	1,3235	1,3610	1,3682	1,3502
G_1	1,2530	1,3196	1,3527	1,3557	1,3033
$G_2 - G_1$	+ 0,0004	+ 0,0039	+ 0,0083	+ 0,0125	+ 0,0169

Messungen dieser Art wurden mit Sand verschiedener Feuchtigkeit, feuchtem Boden und Wasser ausgeführt. Der feuchte Boden war auf dem Meßfeld (etwa 20×80 m groß und überall eben) als Humusschicht von etwa 10 cm Dicke auf Sandunterboden anwesend. Der Sand wurde in 30 cm

Dicke und 3×3 m Oberfläche auf den Boden geschüttet. Das Wasser wurde in einem gegrabenen Tümpel von 3×3 m Oberfläche und 1,5 m Tiefe gemessen. Auf die zu messende

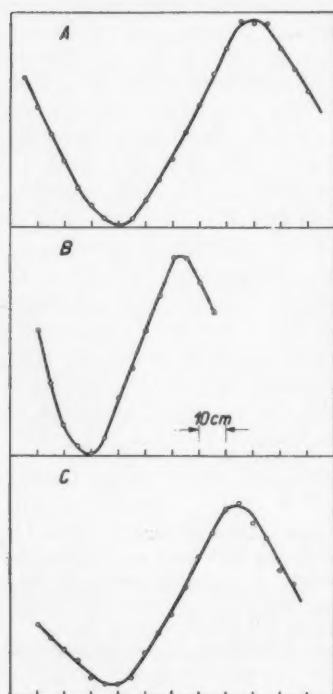


Fig. 10

kommt daher, daß γ in Formel (1) nicht bei allen Messungen gleich war. Die folgende Tabelle enthält die gemessenen und berechneten Werte von (F) nach Formel (4).

Tabelle 2
Reflexionskoeffizienten $|F|$

$ F $ gemessen	0,86	0,71	0,90
$ F $ berechnet	0,854	0,512	0,65
Bodenart	Wasser	Sand	Humuserde
γ	0,71	0,760	0,95

Bodensorte wurde das Holzgestell des Senders (Fig. 3) gestellt. Der Sender wurde während der Messung an langen Schnüren von einem etwa 6 m entfernt seitlich aufgestellten Helfer auf und abbewegt. Bei je 5 cm Höhenveränderung des Senders wurde die Empfangsstärke gemessen. In der Fig. 10 sind drei Reflexionsdiagramme wiedergegeben. Daß Maximum und Minimum nicht in allen Diagrammen gleichweit auseinander liegen,

Reflexionsdiagramme

Ordinate: Gemessene Empfangsintensität.

Abszisse: Höhe der horizontalen Sendeantenne über der Erde in Zentimeter.

A Humusboden

B Süßwasser

C Sandboden

Bei der Berechnung von (F) nach (2) ist ε nach alten Angaben von Zenneck¹²⁾ angenommen worden, σ bei 500 Hz im Laboratorium von uns direkt gemessen.

Tabelle 3

(Konstanten bei der Berechnung von Tab. 2 verwendet)

Erdsorte	Sand	feuchter Boden	Wasser
ε	6	20	80
σ [EME.]	$4 \cdot 10^{-14}$	$1,1 \cdot 10^{-13}$	$5 \cdot 10^{-14}$

Wie aus der Tab. 2 zu ersehen, sind die berechneten (F) -Werte außer beim Wasser kleiner als die gemessenen. Dies führt zum Schluß, daß entweder ε oder σ für 1,42 m Welle viel größer sein müssen als man bisher aus Messungen bei längeren Wellen annahm. Ein Faktor 2 Veränderung bei ε und (oder) σ der Tab. 3 genügt durchaus noch nicht, um (F) berechnet in Tab. 2 mit $(F)_{\text{gemessen}}$ dieser Tabelle übereinstimmen zu lassen. Für ε ist dies aus Dispersionsüberlegungen¹³⁾ unwahrscheinlich. Bleibt also die wahrscheinlichste Möglichkeit, daß σ bei sehr kurzen Wellen mit abnehmender Wellenlänge stark steigt.²⁾ Dies müßte unterhalb etwa 15 m Wellenlänge stattfinden, da wir hierfür noch normale ε - und σ -Werte auf anderem Wege gemessen haben.⁹⁾ Ich werde weiter unten noch mehrere Messungen beschreiben, aus denen ebenfalls ein großes σ bei dieser kurzen Welle folgt.

VII. Polarisationsmessungen

Die Polarisationsmessungen, welche hier beschrieben werden, sind zweifacher Art. Erstens haben wir die Polarisation der ausgesandten Strahlung von *horizontalen* Sendeantennen in Strahlungsrichtungen, die einen großen Winkel mit der Erde bilden, gemessen. Man kann aus der Theorie ableiten, daß diese Strahlung im allgemeinen elliptisch polarisiert sein wird.¹⁾ Zweitens haben wir bei *vertikalen* Sendeantennen gemessen, welchen Winkel die elektrische Feldstärke der ausgesandten Strahlung auf der Oberfläche der Erde mit dieser Ebene bildet. Die Theorie läßt allgemein erwarten¹²⁾, daß die elektrische Feldstärke auf der Erde eine Drehfeldellipse beschreibt, deren große Achse einen Winkel mit der Vertikalrichtung einschließt. Ist der Brechungsindex der Erde:

$$n^2 = \varepsilon - 6 \cdot 10^{13} \cdot \sigma \cdot \lambda \sqrt{-1}$$

(Einheiten vgl. Formel 3) absolut genommen sehr groß, so ist im ersten Fall (horizontale Sendeantenne) die Polarisationsrichtung der elektrischen Feldstärke im Raum für Strahlungsrichtungen, die in einer Ebene senkrecht zur Sendeantenne enthalten sind, stets parallel zur Sendeantenne. Für den zweiten Fall (vertikale Sendeantenne) steht die elektrische Feldstärke für große Absolutwerte von n^2 senkrecht auf der Erdoberfläche.

Ein großes ϵ (etwa größer als 15) läßt sich bei unserer kurzen Wellenlänge nicht erwarten.¹³⁾ Wenn wir also experimentell auf einen großen Betrag von $|n^2|$ schließen, kann dies nur an einem σ -Wert liegen, der bedeutend größer ist als z. B. der bei 500 Hz gemessene.

Ich werde hier Zahlen anführen für eine Messung mit horizontaler Sendeantenne über feuchtem Boden (vgl. voriger Abschnitt). Die Höhe der Sendeantenne wurde zwischen 0 und $\lambda/2$ variiert. Die Höhe des Empfängers über der Erde wurde zwischen 1 m und 15 m variiert. Der Empfänger war mit zwei kurzen Antennen versehen (je 15 cm lang). Mittels des Drehkopfes wurde bei jeder Messung diese Empfangsantenne einmal vertikal und einmal horizontal gestellt. Die vertikale Ebene durch Sender und Empfänger stand (ebenso wie im vorigen Abschnitt) senkrecht auf der horizontalen Sendeantenne. Der Sender wurde mittels des erwähnten Thermokreuzes auf Konstanz kontrolliert. Es ergab sich nun, daß die Empfangsstärke bei vertikaler Empfangsantenne stets weniger als 1 Proz. derjenigen bei horizontaler Empfangsantenne war. Mit Hilfe der ϵ - und σ -Werte aus Tab. 3 würde man erwarten, daß dieses Verhältnis für gewisse, unter den gemessenen eingeschlossenen Strahlungsrichtungen mehrere vom Hundert betragen würden. Das Ergebnis einer ähnlichen Messung mit Wasser statt feuchtem Boden war das gleiche. Beim Wasser mit $\epsilon = 80$ ließ sich aber das Experimentalergebnis theoretisch erwarten.

Die Polarisationsmessung mit vertikaler Sende- und Empfangsantenne für *Strahlung entlang der Erdoberfläche* wurde folgendermaßen ausgeführt. Der Sender wurde mit einer vertikalen, 15 cm langen Antenne versehen, deren Unterspitze sich etwa 1 cm über der vorher sorgfältig geebneten Erde befand. In etwa 15 m Entfernung wurde auf der Erde der Empfänger

aufgestellt, mit gleicher Antenne wie der Sender versehen. Die Empfangsantenne konnte mit Hilfe des Drehkopfes in allen Richtungen gedreht werden, die in einer vertikalen Ebene durch Sender und Empfänger enthalten sind. Es ergab sich bei mäßig feuchtem Boden, daß die Empfangsstärke bei einer Empfangsantennenstellung parallel zur Erde höchstens 1 Proz. der Empfangsstärke bei vertikaler Empfangsantenne betrug. Wir schließen, daß die elektrische Feldstärke des von der vertikalen Sendeantenne ausgestrahlten Feldes senkrecht auf der Erde steht. Aus dem Gleichstromwert der Leitfähigkeit des Erdbodens und ϵ etwa 15 ergibt sich, daß die Horizontalkomponente der Intensität etwa 16 Proz. der Vertikalkomponente betragen würde.¹²⁾ Aus dieser Messung folgt also wieder eine bedeutend *größere Leitfähigkeit der Erde* für 1,4 m Wellenlänge als für Gleichstrom.

VIII. Strahlungsdiagramme in einer vertikalen Ebene

Um einen Einblick zu gewinnen in die Raumstrahlung von Antennen, haben wir eine Reihe von Strahlungsdiagrammen in einer vertikalen Ebene aufgenommen. Hier sollen nur jene Ergebnisse erwähnt werden, die geeignet erscheinen, neues Licht auf diese Fragen zu werfen.

Eine vertikale Sendeantenne, eine halbe Wellenlänge lang, deren Unterspitze der Erde sehr nahe ist, ergibt ein wesentlich verschiedenes Strahlungsdiagramm bei sehr gut (unendlich gut) leitender Erde und bei mäßig leitender Erde.

Wie bereits vorher erwähnt, würde man bei $\lambda = 1,42$ m à priori *jede* Erdsorte (außer Wasser) als „schlecht leitend“ bezeichnen können, denn der Brechungsindex:

$$n^2 = \epsilon - 6 \cdot 10^{12} \sigma \lambda \sqrt{-1}$$

ist für diese Wellenlänge bei normalem σ im Betrag klein (höchstens 20) und es kommt bei Strahlungsvorgängen lediglich auf diesen Betrag an. In Fig. 11 ist der charakteristische Unterschied zwischen Strahlungsdiagrammen eines *vertikalen* Dipols bei großem und kleinem $|n^2|$ veranschaulicht (vgl. auch Ann. d. Phys. 1. S. 734. 1929).

Das gemessene Strahlungsdiagramm, mit einer Antenne von einer halben Wellenlänge aufgenommen, findet man in Fig. 12. Es ist demjenigen für großes $|n^2|$ sehr ähnlich.

Ich will hier erwähnen, daß ein wesentlich identisches Versuchsergebnis bei $\lambda = 2,66$ m und etwa 5 Wellenlängen Abstand vom Sender zum Empfänger von anderer Seite publiziert worden ist⁵⁾, allerdings ohne die hier gegebene Deutung.

In unserer Messung war dieser Abstand größer als zehn Wellenlängen.



Strahlungsamplitude eines vertikalen elektrischen Dipols auf der Erde als Funktion der Strahlungsrichtung (berechnet)

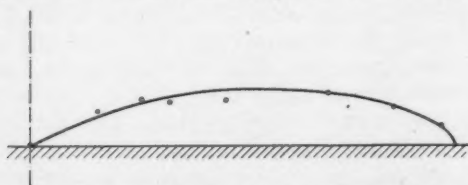
Gestrichelt für $(n^2) = \infty$

Gezogen für $(n^2) = 4$

Fig. 11

Wir schließen aufs neue, daß der Erdboden für so kurze Wellen ein *viel größeres* σ hat als für lange Wellen (von 15 m aufwärts).

Die Theorie läßt erwarten (vgl.¹⁾, daß unmittelbar über der Erde, in etwa 10 Wellenlängen Abstand vom Sender die Empfangsstärke mit der Erhebung über dem Erdboden stark



Punkte: Gemessene Strahlungsintensität bei einer vertikalen Sendeantenne von einer halben Wellenlänge auf der Erde stehend.

Kurve: Berechnete Intensität für $(n^2) = \infty$

Fig. 12

zunimmt. Hierin unterscheidet sich die unendlich gut leitende Erde ($|n^2| \rightarrow \infty$) von der Erde mit endlichem $|n^2|$. Im ersten Fall liegt das Maximum der Empfangsstärke auf der Erde (vgl. Fig. 11); im letzten Fall in einer gewissen Höhe über der Erde. Diese Höhe ist um so kleiner, je größer (n^2) ist.

Diese Sätze gelten z. B. für einen vertikalen elektrischen Dipol als Sender nahe an der Erde.



Ordinate: Empfangsfeldstärke.

Abszisse: Höhe der Unterspitze der vertikalen Empfangsantenne über der Erde in Zentimeter.

Abstand Sender-Empfänger 15 m; Wellenlänge 1,4 m; Sendeantenne 15 cm lang auf der Erde stehend vertikal; Empfangsantenne 15 cm lang

Fig. 13

Ausschlag des Empfängers bei einer vertikalen Sendeantenne von einer halben Wellenlänge als Funktion der Höhe der Unterspitze der Sendeantenne über der Erde in Zentimeter

A = horizontaler Abstand Sender - Empfänger 14,3 m; Höhe des Empfängers über der Erde 5,6 m;

B = horizontaler Abstand Sender - Empfänger 14,3 m; Höhe des Empfängers über der Erde 1,3 m;

C = horizontaler Abstand Sender - Empfänger 14,3 m; Höhe des Empfängers über der Erde 0,1 m.

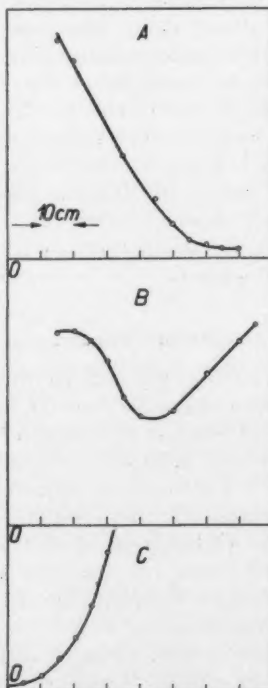


Fig. 14

Das in Fig. 12 wiedergegebene Strahlungsdiagramm ist nur bis zu einem Abstand der Empfangsantenne von der Erde, der etwa ein Meter beträgt, gemessen.

Um nun das obengenannte theoretische Ergebnis zu bestätigen, haben wir Sender und Empfänger mit etwa 15 cm langen *vertikalen* Antennen versehen. Die Sendeantenne war der Erde sehr nahe. Die Höhe der Unterspitze der Empfangsantenne über der Erde wurde von etwa 1 bis etwa 40 cm verändert. Der Ausschlag des Röhrenvoltmeters wurde mittels der Eichkurve des Empfängers (Fig. 7) in Empfangsfeldstärke umgesetzt. In Fig. 13 ist diese gemessene Empfangsfeldstärke als Funktion der Höhe der Empfangsantenne über der Erde wiedergegeben. Wie die Theorie¹⁴⁾ fordert, ergibt sich eine Gerade. Berechnet man aus der Neigung dieser Geraden den Brechungsindex der Erde, so ergibt sich $|n^2|$ von der Ordnung 50. Ohne dieser Zahl, wegen der *endlichen* Länge unserer Meßantennen großes quantitatives Gewicht beizumessen, werden wir doch durch dieses Ergebnis wieder auf eine bedeutend größere Leitfähigkeit der Erde für 1,42 m Wellenlänge, als etwa für 15 m Wellenlänge geführt (vgl. Anhang).

In der Fig. 14 sind einige Strahlungsdiagramme mit vertikalen Sende- und Empfangsantennen wiedergegeben. Hieraus ist deutlich der Einfluß der Sendeantennenhöhe über der Erde auf die Empfangsstärke in verschiedenen Strahlungsrichtungen zu entnehmen.

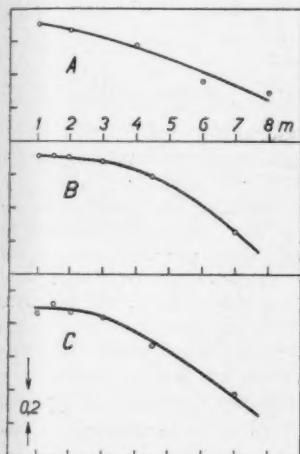
IX. Strahlungsmessungen entlang der Erdoberfläche

Von Weyl¹⁴⁾ und Sommerfeld¹⁵⁾ ist für *vertikale* Sende- und Empfangsantennen die Empfangsstärke als Funktion des Abstandes Sender-Empfänger berechnet worden, wenn beide Antennen sich nahe der Erde befinden. Diese Formeln sind von Rolf¹⁶⁾ zahlenmäßig ausgewertet. Aus einer Messung der Empfangsstärke als Funktion des Abstandes vom Sender können wir Schlüsse auf die Bodeneigenschaften ziehen. Weiterhin muß man aus den theoretischen Ergebnissen von V. Hirschelmann¹⁷⁾ schließen, daß bei *horizontalen* Sende- und Empfangsantennen wesentlich dieselbe Abhängigkeit der Empfangsstärke vom Abstand vorliegt.

Ziel unserer Messungen war, diese beiden Punkte experimentell zu verfolgen. Hierzu wurde eine große Wiese (etwa

150 × 300 m) benutzt, um jede parasitäre Reflexion zu vermeiden. Der Empfangsausschlag wurde mittels Eichkurve des Empfängers auf Feldstärke reduziert. In der Fig. 15 sind die Meßergebnisse für horizontale und vertikale Antennen enthalten.

Erstens bestätigen diese Messungen, daß das Abstandsgesetz der Feldstärke für beide Antennenarten wesentlich das



Ordinate: Briggischer Logarithmus von (Empfangsfeldstärke mal Abstand Sender-Empfänger)

Abszisse: Abstand Sender-Empfänger in Meter

Kurve A: vertikale Sende- und Empfangsantenne am 28. IV. 1930,

Kurve B: vertikale Sende- und Empfangsantenne am 29. IV. 1930,

Kurve C: horizontale Sende- und Empfangsantenne am 29. IV. 1930,

Wellenlänge: 1,42 m

Fig. 15

gleiche ist. Meines Wissens lag ein ähnlich einwandfreies Experimentalergebnis hierüber bisher nicht vor.

Zweitens ergibt sich, daß ein Vergleich der gemessenen Kurven mit den von Rolf berechneten nicht möglich ist. Es läßt sich keine einzige theoretische Kurve mit den gemessenen zur Deckung bringen. Die gemessene Feldstärke nimmt schneller mit zunehmendem Abstand vom Sender ab, als irgendeine berechnete.

Diese Tatsache läßt sich aber leicht deuten. Denn die Theorie rechnet mit Dipolen *auf* der Erde. Wir haben mit Antennen von einer halben Wellenlänge gemessen, die ihrerseits im Mittel wieder etwa eine halbe Wellenlänge von der Erde entfernt waren.

Aus dem Vergleich der theoretischen Kurven Rolfs mit den gemessenen kann aber doch wieder qualitativ auf ein großes $|n^2|$ der Erde geschlossen werden, größer als aus der Messung von ε und σ bei 15 m Wellenlänge am selben Wiesenboden⁹⁾ folgen würde.

An zwei verschiedenen Tagen, mit Niederschlag in der Zwischenzeit, haben wir praktisch den gleichen Verlauf der Feldstärke mit dem Abstand gefunden (Fig. 15).

Hrn. N. S. Markus danke ich herzlich für seine Hilfe.

X. Anhang

Hier sollen kurz jene Formeln abgeleitet werden, welche im Text verwendet worden sind.

Zunächst die Formel (1) des Abschnittes VI.

Es handelt sich um die Strahlung eines horizontalen elektrischen Dipols in einer senkrechten Ebene senkrecht zur Dipolachse. Diese letztgenannte Achse sei parallel zu x . Dann betrachten wir Strahlung in der (ZY)-Ebene. Da die Empfangsantenne bei den Reflexionsmessungen parallel zur Sendeantenne orientiert war, messen wir vom ausgesandten Felde die x -Komponente des elektrischen Vektors \mathcal{E} , also \mathcal{E}_x . Nach einer früher abgeleiteten Formel (vgl. Ann. d. Phys. [V] 1. S. 738. 1929, Formel (16) ist in unserem Fall:

$$\mathcal{E}_x = -i \frac{2\pi}{\lambda} e^{i\omega t} II_{1x} (i = \sqrt{-1}),$$

wobei λ die Wellenlänge, ω die Kreisfrequenz, t die Zeit und II_{1x} die x -Komponente des Hertzischen Potentials der Sendeantenne im Medium I, d. h. in der Luft, bedeuten.

Es ist

$$II_{1x} = \frac{e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} R}}{R} \left\{ e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \gamma} + F e^{-i \frac{2\pi}{\lambda} \gamma} \right\},$$

wobei d die Sendeantennenhöhe über der Erde und R den Abstand vom Koordinatenursprung bis zur Empfangsantenne bedeuten. Die Größe γ ist der Kosinus des Winkels der Verbindungslinie Koordinatennullpunkt-Empfänger mit der z -Achse.

Die letzte Formel gilt nur näherungsweise für endliche R/λ und wird erst streng gültig, wenn dieser Quotient nach ∞ geht. In einer früheren Arbeit (vgl. Ann. d. Phys. [V] 4, S. 13 u. 14, 1930) ist gezeigt worden, daß der Fehler unserer Formel für II_{1x} gegenüber der Wirklichkeit nur einige Promille beträgt für $R/\lambda = 10$, sobald man den Strahlungswinkel $\arccos \gamma$ etwa in der Nähe von 45° wählt. Bei der im Abschnitt VI beschriebenen Reflexionsmessung war diese letztere Bedingung meistens erfüllt. Außerdem war R/λ etwa 15. Folglich dürfen wir behaupten, daß die angeschriebene Näherungsformel für \mathcal{E}_{1x} hier mit einem Fehler, der weit unterhalb des etwa 0,5 Proz. betragenden Meßfehlers liegt, gilt.

Lassen wir alle unnötigen Faktoren beiseite, so entsteht aus den angeschriebenen zwei Formeln die Formel (1) des Abschnittes VI.

Indem (1) nach d differenziert wird, entsteht dann die Formel (4), die in der Tab. 2 verwendet wird.

Zweitens sollen hier die bei der Erörterung unserer Polarisationsmessungen im Abschnitt VII notwendigen Formeln zusammengestellt werden.

Nennt man in der eben gebrauchten Bezeichnungsweise und Lage der Empfangs- und Sendeantenne die vertikale Komponente der empfangenen Feldstärke \mathcal{E}_z , so ergibt sich:

$$\frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{E}_x} = \frac{(1 - \gamma^2) II_{1z}}{II_{1x}} \quad \left(\text{Ann. d. Phys. 1. S. 738. 1929,} \right. \\ \left. \text{Formel 16.} \right)$$

Für großes $|n^2|$ verschwindet II_{1z} und wird $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_x = 0$. Dies wurde mit großer Annäherung gemessen. Erwartet wurde z. B. bei Sandboden und $\arccos \gamma$ etwa 45° ein Verhältnis von $\mathcal{E}_z/\mathcal{E}_x \sim \frac{1}{2}$, wenn man die normalen Daten für ε und σ zugrunde legt.

Nennt man bei einer vertikalen Sendeantenne auf der Erde wieder z die Richtung senkrecht aufwärts und r die radiale Richtung vom Sender zum Empfänger, so ist in der Nähe der Erde

$$\left| \frac{\mathcal{E}_z}{\mathcal{E}_r} \right| \cong |n| \quad \left(\text{J. Zenneck, Ann. d. Phys. 23.} \right. \\ \left. \text{S. 846. 1907.} \right)$$

Die letzte Formel gilt für $|n^2|$ etwa größer als 10. Offenbar wird dieses Verhältnis groß für sehr großes $|n^2|$. Diese Tatsache wurde von uns auch experimentell gefunden.

Drittens geben wir die zum Abschnitt VIII gehörigen Formeln. Das in Fig. 12 gezeichnete Strahlungsdiagramm für $|n^2| = \infty$ wird aus der Formel:

$$\left| -\frac{1}{\pi(2\gamma+1)} + \frac{1}{\pi(2\gamma-1)} + \frac{\cos \pi(2\gamma+1)}{\pi(2\gamma+1)} - \frac{\cos \pi(2\gamma-1)}{\pi(2\gamma-1)} \right|$$

erhalten (bis auf einen gleichgültigen Faktor).

In der Nähe der Erde ist beim vertikalen elektrischen Dipol nach H. Weyl¹⁴⁾ die Vertikalkomponente der elektrischen Feldstärke in großem Abstand vom Sender proportional zu:

$$\frac{C_1 \frac{z}{\lambda} - i C_2}{R}$$

(z = Höhe der Empfangsantenne über der Erde; R = Abstand Sender-Empfänger) mit

$$C_1 = \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^2 - 1}}; \\ C_2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{n^2 - 1}.$$

Die Anwendbarkeit dieser letzten Formel ist allerdings in zehn Wellenlängen Entfernung für großes $|n^2|$ zweifelhaft. Daher geben wir den aus ihr berechneten Wert von $|n^2|$ unter Reserve.

XI. Zusammenfassung

In zwei Abschnitten wird der Aufbau und die Prüfung eines Röhrenders und eines Röhrenempfängers nebst Verstärker und Röhrenvoltmeter für 1,42 m Wellenlänge beschrieben. Hauptgewicht fällt auf Arbeiten der Meßvorrichtung *ausschließlich* auf den Antennen, bei Vermeidung jeder parasitären Strahlung.

Mit dieser Vorrichtung sind nach einer neuen Methode die elektrischen Erdbodeneigenschaften bei 1,4 m Wellenlänge gemessen worden. Es ergab sich ein im Betrage größerer Brechungsindex der Erde als aus den etwa bei 15 m am selben Boden gemessenen Eigenschaften folgt. Als wahrscheinlichste Erklärung wird angenommen, daß die Leitfähigkeit der Erde für sehr kurze Wellen (etwa 1 m) stark steigt mit abnehmender Wellenlänge. Dieses Verhalten wurde bei Sand-, Humus-, Lehm- und Wiesenboden festgestellt. Bei Wasser entsprach der gemessene Brechungsindex der theoretischen Erwartung ($80 = \epsilon$).

Messungen über die Polarisationsrichtung der von vertikalen und horizontalen Antennen ausgesandten Wellen ergaben ebenfalls einen großen Brechungsindex der Erde.

Durch Messung von Strahlungsdiagrammen in einer vertikalen Ebene konnte die Theorie verifiziert werden. Insbesondere die theoretische Erwartung, daß die empfangene Feldstärke bei vertikalen Sendeantennen nahe der Erde proportional zur Höhe über der Erde ansteigt. Auch diese Messungen ergaben einen großen Brechungsindex der Erde.

Endlich wurde bei vertikalen und horizontalen Sendeantennen entlang der Erde die Abhängigkeit der Empfangsstärke vom Abstand Sender-Empfänger nachgemessen. Hierdurch wurde die theoretisch zuerst von v. Hörschelmann aufgestellte Erwartung bestätigt, demgemäß das Abstandsgesetz bei beiden Antennenarten wesentlich das gleiche ist.

Literaturverzeichnis

1) M. J. O. Strutt, Strahlung von Antennen unter dem Einfluß der Erdbodeneigenschaften; A. Elektrische Antennen; B. Magnetische Antennen; C. Rechnung in zweiter Näherung. Ann. d. Phys. (V) **1** S. 721—772. 1929; **4** S. 1—16. 1930.

2) Derselbe, Reflexionsmessungen mit sehr kurzen elektrischen und mit akustischen Wellen. ENT. **7** S. 65. 1930. Messung der Leitfähigkeit der Erde für kurze elektrische Wellen. Naturwissensch. **17** S. 727. 1929. Ausbreitung elektrometrischer Wellen auf der Erde. Naturwissensch. **17** S. 919. 1929.

3) P. P. Eckersley, T. L. Eckersley u. H. L. Kirke, Design of aerials for broadcasting Stations. *Experimental Wireless & Wireless Engineer* 5. S. 86. 1929; *Journal Institute El. Eng.* 67. S. 507. 1929.

4) M. Bäuml, K. Krüger, H. Plendl u. W. Pfitzer, Strahlungsmessungen an Kurzwellen-Richtantennen der Großfunkstelle Nauen. Gemeinsame Mitteilung des Reichspostzentralamtes und der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., 1930. K. Krüger u. H. Plendl, Aufnahme der Strahlungskennlinien eines Kurzwellenrichtstrahlsystems der Großfunkstelle Nauen im Flugzeug. 172. Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., Berlin-Adlershof. H. Fassbender, F. Eisner, G. Kurlbaum, Untersuchung über die Ausbreitungsdämpfung elektromagnetischer Wellen und die Reichweiten drahtloser Stationen im Wellenbereich 200—2000 m. 173. Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt E. V., auch *Elektr. Nachr. Techn.* 7. Heft 7, 1930.

5) S. Uda, High Angle Radiation of short el. Waves. *Proc. Institute Radio Engineers* 15. S. 377. 1927. H. Yagi, Beam Transmission of ultra short Waves. *Proc. Inst. Radio Eng.* 16. S. 715. 1928.

6) L. Bergmann, Messungen im Strahlungsfelde einer in Grund- und Oberschwingungen erregten stabförmigen Antenne. *Ann. d. Phys.* 82. S. 504. 1927. H. Peters, Messungen im Strahlungsfeld einer in der Grundschiwingung ungedämpft erregten Dipolantenne. *Elektr. Nachr. Techn.* 7. S. 378. 1930.

7) M. J. O. Strutt, Schwingungen in Dreielektrodenröhren mit positivem Gitter. *Ann. d. Phys.* 4. S. 17. 1930.

8) L. Bergmann, a. a. O. und Jahrbuch drahtloser Telegraphie und Telephonie 35. S. 135. 1930.

9) M. J. O. Strutt, Messung der elektrischen Erdbodeneigenschaften zwischen 20 und $2 \cdot 10^7$ Hz. *Elektr. Nachr. Techn.* 7. S. 387. 1930.

10) Namentlich in Räumen ist diese Wirkung sehr stark und wurde sie vom Verf. erfolgreich als Alarmvorrichtung verwendet (Pat. angemeldet).

11) Vgl. die dritte Arbeit des Verf. unter (1) S. 14. 1930.

12) J. Zenneck, Über die Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen längs einer ebenen Leiterfläche und ihre Beziehung zur drahtlosen Telegraphie. *Ann. d. Phys.* 23. S. 846. 1907.

13) P. Debye, Polare Molekeln. Leipzig 1929.

14) H. Weyl, Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einer ebenen Leiter. *Ann. d. Phys.* 60. S. 485. 1919.

15) A. Sommerfeld, Riemann-Weber II, S. 542, 1929.

16) B. Rolf, Numerical discussion of Professor Sommerfelds attenuation formula for radio waves; Ingeniörs Vetenskaps Akademien Handlingar No. 96 (Stockholm 1929).

17) H. von Hörschelmann, Über die Wirkungsweise des geknickten Marconischen Senders in der drahtlosen Telegraphie. *Jahrb. drahtloser Telegraphie und Telephonie* 5. S. 14, 188. 1912.

11. November 1930.

(Eingegangen 4. Februar 1931)

Berichtigung zu meiner Arbeit
„Die linienhafte Absorption der Chromalaunkristalle“¹⁾
Von H. Sauer

Bei der Weiterführung der Versuche im Jenaer Physikalischen Institut zeigte sich, daß auf Seite 233, Zeile 2 von oben u. ff. bei der Diskussion des Einflusses der Temperatur auf die Breite der Linien ein Rechenfehler unterlaufen ist, der, wie wir inzwischen feststellten, bereits von Hrn. Urbach²⁾ bemerkt wurde. Wie sich aus den in Tabelle 5 (Seite 232) mitgeteilten Meßresultaten ergibt, ist das Verhältnis der gesamten Halbwertsbreite der Linie (11, 12) bei den Temperaturen $t_2 = -78^\circ \text{C}$ und $t_1 = -190^\circ \text{C}$ etwa 1,2. Das \sqrt{T} -Gesetz ist also für dieses Dublett als Ganzes nicht erfüllt, die Änderung der Halbwertsbreite zwischen diesen Temperaturen erfolgt nur mit der Potenz 0,23. Dagegen besteht wegen nicht vollständiger Trennung an sich die Möglichkeit, daß das Gesetz für die einzelnen Komponenten der Linie (11, 12) zutrifft.

Bei den Linien (I, II) und (7, 8), für die ebenfalls Daten in Tabelle 5 mitgeteilt werden, erfolgt die Änderung der gesamten Halbwertsbreite von -190°C bis -78°C etwa mit der Potenz 0,7. Da die Temperaturänderung der gesamten Halbwertsbreite eines Dubletts immer kleiner sein wird als die der Komponenten (Konstanz des Abstandes der Komponenten vorausgesetzt), dürfte bei diesen Linien das \sqrt{T} -Gesetz auch nicht für die Komponenten erfüllt sein. In der Zusammenfassung Seite 236 ist daher der Satz „für die Halbwertsbreiten ist eine Zunahme proportional \sqrt{T} zu erkennen“ zu streichen.

1) H. Sauer, Ann. d. Phys. 87. S. 197. 1928.

2) F. Urbach, Wiener Sitzungsberichte math.-nat. Kl. Abt. IIa. 138. 5. und 6. Heft.

(Eingegangen 1. März 1931)

Über die Seriengesetze der elastischen Eigenfrequenzen von Quarzstäben

**I. Teil: Dehnungsschwingungen
Von E. Giebe und A. Scheibe**

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt)

(Mit 21 Figuren)

Inhalt: § 1. Einleitung. — § 2. Die Elastizitätsmoduln des Quarzes; statische Dehnung von Quarzstäben. — § 3. Zur Theorie der Dehnungsschwingungen; Rayleighs Dickenkorrektur. — § 4. Messung der longitudinalen Eigenfrequenzen. — § 5. Abmessungen und Modulwerte s_{11} der Quarzstäbe. — § 6. Einfluß von Orientierungsfehlern und von Verwachsungen; Korrektur ϵ . — § 7. Einfluß der sekundären elektrischen Felder; Schlussresultat für den Modul s_{11} . — § 8. Harmonieabweichungen bei Stäben I und II, in einigen typischen Kurven dargestellt; Vergleichung mit Rayleighs Dickenkorrektur. — § 9. Tabellen der beobachteten Harmonieabweichungen. — § 10. Kopplung zwischen Dehnungs- und Drillungsschwingungen; Dubletts; Koinzidenzen. — § 11. Ähnlichkeitsgesetz: Für geometrisch ähnliche Stäbe der Orientierung II ist die Harmonieabweichung der Eigenfrequenzen gleich groß. — § 12. Linien- und Bandenspektren der Eigenfrequenzen von Stäben der Orientierung II. — § 13. Axiale und laterale Schwingungen, Resonanz zwischen beiden. — § 14. Empirische Formel für das Linienspektrum, Seriengesetz I. — § 15. Kopplungstheoretisch begründete Formel für das Linienspektrum, Seriengesetz II. — § 16. Axiale Eigenfrequenzen oberhalb der Resonanzfrequenz f_r ; Untersuchung des Bandenspektrums. — § 17. Praktische Folgerungen für die Herstellung von Frequenznormalen. — § 18. Zusammenfassung.

§ 1. Einleitung

Mit Hilfe des Piezoeffektes lassen sich Quarzstäbe nicht nur zu Dehnungsschwingungen nach dem von Cady angegebenen Verfahren, sondern auch, wie wir in einer früheren Arbeit gezeigt haben¹⁾, zu Bieigungs- und Drillungsschwingungen in einfacher Weise anregen. Wir konnten dabei sehr hohe Ober-

1) E. Giebe u. A. Scheibe, Ztschr. f. Phys. 46. S. 607. 1928.

schwingungen bei allen drei Schwingungstypen z. B. die 53. Biegungseigenfrequenz erreichen und durch Anordnung der Quarzstäbe im Vakuum mit Hilfe der piezoelektrischen Leuchterscheinung Typ und Ordnungszahl der Schwingungen mit Sicherheit feststellen. Damit war die Möglichkeit gegeben, die Gültigkeit der bekannten Frequenzformeln der Elastizitätstheorie für die drei Schwingungsarten in einem großen Frequenzbereich zu prüfen. Wir haben bereits früher¹⁾ darauf hingewiesen, daß bei den Dehnungsschwingungen und ganz besonders bei Biegungsschwingungen die beobachteten Eigenfrequenzen hoher Ordnung recht erheblich von den theoretischen Seriengesetzen abweichen, auch dann noch, wenn man die schon von Rayleigh abgeleiteten genaueren Frequenzformeln in Betracht zieht. Für die Elastizitätstheorie war es daher von Bedeutung, die Reihen der elastischen Eigenfrequenzen von Quarzstäben bis zu möglichst hohen Ordnungen genau zu messen und die Ursache der Unstimmigkeiten zwischen Theorie und Experiment aufzudecken. Im Hinblick auf die vielfache technische Verwendung von piezoelektrischen Resonatoren als Frequenznormale haben solche Messungen zugleich auch eine praktische Bedeutung und schienen geeignet, manche Eigentümlichkeiten dieser Resonatoren in ihren Ursachen zu erforschen. Über piezoelektrisch angeregte Schwingungen von Quarzplatten liegen bereits einzelne Untersuchungen in dieser Richtung vor²⁾, welche zeigen, daß es sich hier z. T. um sehr komplizierte Schwingungsformen handelt. Es schien daher aussichtsreicher für unser Ziel, systematische Untersuchungen der elastischen Eigenschwingungen an Quarzstäben statt an Platten auszuführen. In dem vorliegenden I. Teil dieser Untersuchungen befassen wir uns nur mit den Dehnungsschwingungen, während die Biegungs- und Drillungsschwingungen späteren Mitteilungen vorbehalten bleiben.

§ 2. Die Elastizitätsmoduln des Quarzes; statische Dehnung von Quarzstäben

Das elastische Verhalten des Quarzkristalles ist durch sechs Moduln bestimmt, die wir nach Voigt³⁾ mit s_{11} , s_{33} , s_{44} ,

1) E. Giebe u. A. Scheibe, im Tätigkeitsber. der PTR. für 1926; Ztschr. f. Instrkde. 47. S. 276. 1927; El. Nachr. Techn. 5. S. 80. 1928.

2) F. R. Lack, Proc. Inst. Radio Eng. 17. S. 1123. 1929; D. W. Dye, Report of the Nat. Phys. Lab. S. 113. 1929.

3) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik S. 749.

s_{12} , s_{13} , s_{14} bezeichnen. Diese Moduln haben in verschiedenen Richtungen im Kristall im allgemeinen verschiedene Zahlenwerte. Wir benutzen im folgenden als rechtwinkliges Bezugssystem nach Voigt das Hauptachsenkreuz, dessen X- bzw. Z-Achse in die Richtung einer elektrischen bzw. der optischen Achse fällt. In bezug auf dieses System haben die Elastizitätsmoduln des Quarzes nach statischen Biegungs- und Drillungsbeobachtungen von Voigt¹⁾ die in Tab. 1 zusammengestellten Zahlenwerte bei Raumtemperatur, auf die wir im folgenden mehrfach zurückkommen werden.

Tabelle 1

Elastizitätsmoduln des Quarzes nach statischen Messungen von Voigt
 $A-J$ = Differenzen der adiabatischen und isothermischen Moduln.

Einheit: $10^{-13} \frac{\text{cm}^2}{\text{Dyn}}$

	s_{11}	s_{33}	s_{44}	s_{12}	s_{13}	s_{14}
Adiabatischer Wert	12,95 ₁	9,88 ₅	20,04 ₆	-1,69	-1,53	-4,31
$A-J$	-0,02 ₉	-0,00 ₈	0	-0,02 ₉	-0,01 ₅	0

Welche Bedeutung diesen Moduln für die vorliegende Untersuchung von Dehnungsschwingungen zukommt, erkennen wir am einfachsten, wenn wir zunächst die elastischen Vorgänge bei statischer gleichförmiger Dehnung von Quarzstäben durch eine in Richtung der Stabachse wirkende konstante Kraft P betrachten: Wir unterscheiden drei verschiedene Orientierungen der Quarzstäbe durch die Ziffern I, II, III, je nachdem die Stabachse in die Richtung der Y- bzw. X- bzw. Z-Achse unseres Koordinatensystems fällt und legen den Koordinatenanfangspunkt in die Mitte der Stabachse. Unsere Stäbe haben, mit wenigen Ausnahmen, die Form rechtwinkliger Parallelepipede, deren Kanten parallel den Koordinatenachsen sind. Die auf den Stabquerschnitt Q wirkende Zugspannung P/Q bezeichnen wir mit X_x , Y_y , Z_z , je nachdem Stabachse und Kraftrichtung in Richtung der X- bzw. Y- bzw. Z-Richtung fällt, die Komponenten der Verrückung eines Punktes x , y , z mit u , v , w . Das Problem der statischen Längsdehnung von Kristallstäben ist

1) W. Voigt, Wied. Ann. 31. S. 718. 1887. Die dort angegebenen Zahlen, denen die Maßeinheiten g-Gewicht und Millimeter zugrunde liegen, sind auf CGS-Einheiten umgerechnet; die Differenzen $A-J$ in Tab. 1 sind von Voigt berechnet (Lehrbuch S. 789).

von Voigt allgemein behandelt¹⁾, aus den von ihm abgeleiteten Formeln ergeben sich bei Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften des Quarzes die folgenden:

Für Orientierung I

$$(1) \quad u = s_{12} x Y_y, \quad v = (-s_{14} z + s_{11} y) Y_y, \quad w = s_{13} z Y_y,$$

für Orientierung II

$$(2) \quad \begin{aligned} u &= s_{11} x X_x, \quad v = (s_{12} y + \tfrac{1}{2} s_{14} z) X_x, \\ w &= (s_{13} z + \tfrac{1}{2} s_{14} y) X_x, \end{aligned}$$

für Orientierung III

$$(3) \quad u = s_{13} x Z_z, \quad v = s_{13} y Z_z, \quad w = s_{33} z Z_z.$$

Die Differentialquotienten $\partial u / \partial x$, $\partial v / \partial y$, $\partial w / \partial z$ ergeben die Deformationsgrößen, d. h. die Längsdilatation oder die Querkontraktion. Für die Stäbe I und II ist demnach s_{11} das Maß der Längsdilatation, der Dehnungsmodul, für Stäbe III s_{33} ; die Querkontraktion wird bei letzteren in der X- und in der Y-Richtung durch den gleichen Modul s_{13} , bei Stäben I und II aber in den beiden Querdimensionen durch verschiedene Moduln s_{12} oder s_{13} gemessen. Die Stäbe III verhalten sich genau so wie isotrope Stäbe, sie sind aber piezoelektrisch nicht anregbar, und kommen deshalb für diese Untersuchung nicht in Betracht. Da nach Tab. 1 der Unterschied zwischen den Moduln s_{12} und s_{13} nur sehr klein ist (etwa 10 Proz.), so unterscheidet sich das Verhalten der Stäbe I und II hinsichtlich der Querkontraktion nicht wesentlich von dem isotroper Stäbe, wohl aber in anderer Beziehung, nämlich durch die infolge der Längsdehnung eintretenden Winkeländerungen, für welche der Modul s_{14} das Maß liefert. Bei Stäben I ändert sich nämlich die Verrückungskomponente v nicht nur mit y , sondern auch mit z und für Orientierung II ist v bzw. w nicht nur von y bzw. z , sondern auch von z bzw. y abhängig. Im letzteren Falle ist daher der ursprünglich rechtwinklige Querschnitt nach der Dehnung schiefwinklig, im ersten gilt entsprechendes für den Längsschnitt.

1) W. Voigt, Lehrbuch der Kristallphysik S. 631.

§ 3. Zur Theorie der Dehnungsschwingungen.
Rayleighs Dickenkorrektion

Die Eigenfrequenzen eines longitudinal schwingenden, isotropen, „frei-freien“ Stabes sind durch die bekannte Beziehung

$$(4) \quad f_k = \frac{k}{2L\sqrt{s d}},$$

gegeben (L Stablänge, d Dichte, $k = 1, 2, \dots$ Ordnungszahl, s Dehnungsmodul in der Voigtschen Bezeichnungsweise). Die Frequenzen der Oberschwingungen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz f_1 , es gilt das Harmoniegesetz

$$(5) \quad f_k = k f_1.$$

Diese Formeln haben zur Voraussetzung, daß die Länge des Stabes oder der stehenden elastischen Welle groß ist gegenüber den Lineardimensionen seines Querschnittes. Ist diese Voraussetzung nicht hinreichend erfüllt, also bei hohen Oberschwingungen, um die es sich in unserer Untersuchung hauptsächlich handelt, so gilt die Formel (4) nicht mehr genau, weil die bei ihrer Ableitung nicht berücksichtigte kinetische Energie der Querbewegung, die durch die periodische Querkontraktion entsteht, einen merklichen Zusatz zur kinetischen Energie der Längsbewegung liefert. Man pflegt nach Rayleigh¹⁾ diesem Umstande durch eine „Dickenkorrektion“ Rechnung zu tragen. Bei rechteckigen Stäben (Seiten a und b) eines isotropen Stabes tritt dann an Stelle von (5)

$$(6) \quad F_k = k f_1 : \sqrt{1 + \frac{1}{3} \mu^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{4} \right) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}}$$

oder, sofern das Korrektionsglied unter der Wurzel klein gegen 1 ist, angenähert

$$(6a) \quad \frac{k f_1}{F_k} = 1 + \frac{1}{6} \mu^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{4} \right) \frac{k^2 \pi^2}{L^2}$$

hierin bedeutet μ das Verhältnis von Querkontraktion zu Längsdilatation (Poissonsche Konstante). Die Oberschwingungen F_k sind dann nicht mehr genau harmonisch. Einer experimentellen Prüfung ist diese Korrektion bisher wohl kaum unterzogen, da man erst neuerdings gelernt hat, mit Hilfe der Piezoelektrizität hochfrequente Dehnungsschwingungen anzuregen. Schwer-

1) Rayleigh, Theorie of Sound 1. Kap. 7. § 157. 1877.

wiegende theoretische Bedenken gegen diese Korrektur sind von M. v. Laue¹⁾ erhoben. Wenn wir die Rayleighsche Korrekturrechnung auf unsere Quarzstäbe anwenden, so haben wir außer der Querbewegung nach § 2 auch die mit den Winkeländerungen verbundene Bewegung zu berücksichtigen. Dann ergeben sich die folgenden Formeln, in denen S_x , S_y , S_z die Querschnittseiten, L_x und L_y die Stablängen bedeuten:

Für Orientierung I

$$(7) \quad \frac{k f_1}{F_k} = 1 + \frac{1}{6} \frac{S_x^2 s_{12}^2 + S_z^2 (s_{13}^2 + s_{14}^2)}{4 s_{11}^2} \frac{k^2 \pi^2}{L_x^2}$$

für Orientierung II

$$(8) \quad \frac{k f_1}{F_k} = 1 + \frac{1}{6} \frac{S_y^2 (s_{12}^2 + \frac{1}{4} s_{14}^2) + S_z^2 (s_{13}^2 + \frac{1}{4} s_{14}^2)}{4 s_{11}^2} \frac{k^2 \pi^2}{L_x^2}$$

während für Orientierung III wie für isotrope Stäbe Formel (6a) gilt, wenn man μ^2 durch $s_{13}^2 : s_{33}^2$, sowie a und b durch S_x bzw. S_y ersetzt. Für die Stäbe I und II ist ferner nach § 2 in den Formeln (4) und (5) s durch s_{11} , für Stäbe III durch s_{33} zu ersetzen.

Aus den folgenden Abschnitten sei hier vorweggenommen, daß die Formeln (7) und (8) mit den Beobachtungen nicht in Einklang stehen. Der wesentliche Inhalt der vorliegenden Untersuchung war daher, das Seriengesetz der longitudinalen Eigenfrequenzen von Quarzstäben durch Messungen zu bestimmen und theoretisch zu deuten. Die Beobachtungen ergeben, daß die Reihe der wirklichen Eigenfrequenzen $F_1, F_2 \dots F_k$ mit zunehmender Ordnungszahl immer mehr vom Harmoniegesetz (5) abweichen. Wir bezeichnen im folgenden die relative Differenz

$$(9) \quad \Delta_k = \frac{k F_1 - F_k}{F_k}$$

kurz als *Harmonieabweichung*. Setzt man für die Frequenzen die ihnen entsprechenden elektrischen Wellenlängen $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_k$, so ist die Harmonieabweichung

$$(10) \quad \Delta_k = \frac{k \lambda_1 - \lambda_k}{\lambda_k}$$

Da für die von uns gewählten Stabdimensionen der Einfluß der Stabdicken bei $k = 1$, wie die Erfahrung lehrte, meist ver-

1) M. v. Laue, Ztschr. f. Phys. 34. S. 350. 1925.

schwindend klein war, so konnte man in vielen Fällen als Bezugsfrequenz gemäß Formel (9) unmittelbar die gemessene Grundfrequenz F_1 wählen, also F_1 dem theoretischen Wert f_1 der Formel (4) gleichsetzen. In einigen Fällen jedoch mußte man aus Gründen, die wir später erläutern werden, an den beobachteten Werten von F_1 eine kleine empirisch zu ermittelnde Korrektur

$$(11) \quad \varepsilon = \frac{F_1 - f}{F_1}$$

anbringen, also mit einer „idealen“ Grundeigenfrequenz

$$(12) \quad f = F_1 (1 - \varepsilon)$$

als Bezugsfrequenz rechnen. Eine entsprechende Korrektur ist an Δ_k in (9) anzubringen, und die Harmonieabweichung ergibt sich zu

$$(13) \quad \delta_k = \frac{k f - F_k}{F_k} = \Delta_k (1 - \varepsilon) - \varepsilon$$

oder genügend genau

$$(14) \quad \delta_k = \Delta_k - \varepsilon.$$

Das Vorzeichen der Korrektur ε ist teils positiv, teils negativ, ihr Wert ist stets klein, zwischen 0 und etwa 3 Promille liegend.

Bei sehr kurzen und dicken Stäben muß man für f in (13) denjenigen Betrag f_1 einsetzen, der sich aus der gemessenen Länge und den bekannten Werten von $s = s_{11}$ und L nach Formel (4) für $k = 1$ berechnet. Die Unsicherheit in f_1 kann dann nach dem folgenden § 4 einige Promille betragen.

§ 4. Messung der longitudinalen Eigenfrequenzen

Die Versuchsanordnungen zur piezoelektrischen Anregung von Dehnungsschwingungen, die für die beiden Orientierungen I und II etwas verschieden sind, haben wir in einer früheren Arbeit¹⁾ ausführlich beschrieben, auf die wir verweisen können. Die Beobachtung der Resonanz zwischen elektrischen und elastischen Schwingungen erfolgte stets nach der Leuchtmethode, die Schwingungstyp und Ordnungszahl mit völliger Sicherheit festzustellen gestattet. Auch hierüber ist bereits früher berichtet.

1) E. Giebe u. A. Scheibe, Ztschr. f. Phys. 46. S. 607. 1926; E. N. T. 5. S. 65. 1928.

Hier sei nur noch darauf hingewiesen, daß die Kopplung der Quarzstäbe, also des elastischen Schwingungssystems mit dem erregenden elektrischen System stets äußerst lose war und daß die Eigenfrequenz des letzteren immer möglichst verschieden von derjenigen des ersteren gewählt wurde. Fehler durch Rückwirkung waren daher nicht zu befürchten. Diejenige Frequenz der erregenden Wechsellspannung, bei welcher man Resonanz des Quarzstabes beobachtet, ist daher der Eigenfrequenz des letzteren genau gleich zu setzen. Übrigens wurde auch, wenn man die Eigenfrequenz des elektrischen Systems gleich der des elastischen machte, die Resonanzfrequenz des Quarzstabes nur äußerst wenig verändert. Zur Messung der Frequenzen diente der Normalfrequenzmesser¹⁾ der Reichsanstalt, seine absolute Genauigkeit beträgt 0,1—0,2 Promille. Für die vorliegende Untersuchung kam es hauptsächlich darauf an, die Abweichungen der longitudinalen Oberschwingungen von den harmonischen Verhältnissen zu messen, die bei niedrigen Ordnungen sehr klein sind und dann allmählich im Maximum bis zu etwa 15 Proz. ansteigen. Als zweckmäßig erwies sich hierfür das folgende Meßverfahren, bei dem zwei Röhrensender *A*, *B* zur Anwendung kamen. Der Sender *A* wurde in seiner Grundschwingung nacheinander auf die Reihe der Eigenfrequenzen $F_1, F_2 \dots F_k$ der Quarzstäbe abgestimmt. Der Sender *B* wurde nach der Schwebungsmethode so eingestellt, daß zunächst seine Grundschwingung N_1 und dann die aufeinander folgende Reihe seiner Oberschwingungen $N_2 \dots N_k$ mit F_1, F_2 usw. übereinstimmten. Mit dem Normalfrequenzmesser wurden die jedesmaligen Grundfrequenzen $N_1, N_2/2 \dots N_k/k$ von *B* gemessen, die verhältnismäßig wenig voneinander verschieden sind; am Frequenzmesser waren also meist nur ziemlich kleine Kapazitätsdifferenzen, — in vielen Fällen innerhalb der Skala eines Drehkondensators — abzulesen, aus denen sich die Differenzen $F_1 - \frac{F_2}{2}, F_1 - \frac{F_3}{3}$ usw., d. h. die gesuchten Harmonieabweichungen ergaben. Eine Meßgenauigkeit von 0,1 Promille der Frequenz ist dabei ganz leicht zu erreichen; höhere Genauigkeit ist aus verschiedenen Gründen zwecklos.

In einzelnen Fällen begnügten wir uns übrigens mit einem einfachen Frequenzmesser und einer Genauigkeit von 1 Promille.

1) E. Giebe u. E. Alberti, Ztschr. f. techn. Phys. 6. S. 92. 1925.

§ 5. Abmessungen und Modulwerte s_{11} der Quarzstäbe

Aus unseren früheren Untersuchungen über piezoelektrische Resonatoren stand uns eine Menge von Stäben verschiedenster Dimensionen zur Verfügung, die dann noch durch eine weitere Anzahl für das Ziel der vorliegenden Arbeit geeignet bemessener Stäbe ergänzt wurde.¹⁾ Der größte Teil dieses Stabmaterials ist in den Tabellen 2 und 3 für Orientierung I bzw. II verzeichnet.

Tabelle 2

Abmessungen und Modulwerte s_{11} der Quarzstäbe
Orientierung I

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stab-Nr.	Länge L_z mm	Querschnitt		Grund- schwingung		s_{11} 10^{-12} cm ² Dyn	Diffe- renzen gegen Mittel Pro- mille	
		Form recht- eckig	Abmessungen S_z mm	S_z mm	elektr. Wellen- länge λ m			Fre- quenz f k Hz
101	86,84	$S_z > S_x$	1,502	2,008	9512	31,523	1,2589	- 5,3
102	82,64	"	1,488	2,000	9090	32,987	1,2695	+ 3,1
103	85,38	"	1,494	2,001	9366	32,015	1,2626	- 2,4
104	88,22	"	1,506	2,009	9675,5	30,991	1,2621	- 2,8
105	83,66	"	1,489	2,002	9188	32,635	1,2656	0
106	78,56	"	1,498	2,005	8633	34,733	1,2671	+ 1,2
107	18,28	"	1,504	2,990	2010,5	149,14	1,2692	+ 2,8
110	99,58	"	1,508	2,992	10934	27,424	1,2650	- 0,5
116	45,10	"	1,490	2,982	4912	61,044	[1,2447]	[-16,5]
122	99,52	"	1,505	2,992	10940	27,409	1,2679	+ 1,8
123	144,43	"	1,496	2,987	15819	18,955	1,2587	- 5,5
120	80,06	"	1,499	2,983	8728	34,355	[1,2470]	[-14,7]
124	90,10	"	1,491	2,935	9807	30,575	[1,2431]	[-17,8]
127	79,92	"	1,517	3,003	8786,6	34,126	1,2683	+ 2,1
128	43,33	"	1,518	3,002	4752	63,100	1,2620	- 2,8
108	55,40	"	1,494	5,992	6088,3	49,250	1,2673	+ 1,3
109	55,40	"	1,497	5,993	6075,3	49,356	1,2618	- 3,0
126	80,20	"	1,496	6,007	8812,2	34,027	1,2668	+ 0,9
129	49,82	$S_z > S_x$	3,003	1,506	5487,2	54,644	1,2729	+ 5,8
117	50,12	"	5,990	1,498	5506,5	54,454	1,2665	+ 0,7
118	50,12	"	5,989	1,500	5504,0	54,479	1,2654	- 0,2
125	80,20	$S_z = S_x$	1,496	1,486	8816,0	34,012	1,2679	+ 1,8

Mittel²⁾ 1,2656 ± 2,9

1) Die Stäbe sind teils von der Fa. Bernhard Halle Nachf., Berlin-Steglitz, Hubertusstr. 11, teils von der Fa. Radioaktiengesellschaft D. S. Loewe, Berlin-Steglitz, Wiesenweg 10, bezogen.

2) Ohne die eingeklammerten Zahlen.

Tabelle 3

Abmessungen und Modulwerte s_{11} der Quarzstäbe
Orientierung II

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stab-Nr.	Länge L_z mm	Querschnitt		Grund- schwingung		Fre- quenz f kHz	s_{11} 10^{-12} cm ² Dyn	Diffe- renzen gegen Mittel Promille
		Form	Abmessungen S_y mm	S_z mm	elektr. Wellen- länge λ m			
1	79,72	rechteck. $S_y > S_z$	1,500	3,007	8789,7	34,114	1,2756	-1,5
2	80,09	"	1,505	2,997	8840,8	33,917	1,2785	+0,8
3a	62,0	"	1,507	3,006	6842,4	43,822	1,2780	+0,4
3b	49,93	"	1,507	3,006	5518,6	54,334	1,2818	+3,4
4	49,96	"	1,504	3,002	5503,0	54,488	1,2731	-3,4
5	10,95	"	1,50	3,00	1270,1	248,4	1,2750	-2,0
6b	49,97	"	1,480	4,494	5510,4	54,415	1,2760	-1,2
6a	49,97	"	1,480	5,99	5510	54,419	1,2757	-1,4
7	49,97	"	1,481	5,985	5512,5	54,395	1,2769	-0,5
8a	49,92	"	2,614	2,999	5509,2	54,427	1,2780	+0,4
9	52,4	rechteck. $S_y > S_z$	3,005	1,497	5785	51,832	1,2789	+1,1
10	49,92	"	3,002	1,494	5506,7	54,452	1,2769	-0,5
11a	29,90	"	3,007	1,499	3298	90,92	1,2766	-0,7
11b	29,90	"	3,007	0,75	3299	90,89	1,2774	-0,1
12	20,03	"	3,002	1,494	2203	136,11	1,2693	-6,4
13	50,02	"	4,499	1,500	5519,2	54,329	1,2775	0
14	49,97	"	5,995	1,499	5512,7	54,393	1,2770	-0,4
15	52,1	"	5,999	1,497	5746	52,184	1,2763	-0,9
16	49,88	quadrat. $S_y = S_z$	2,999	2,998	5514,0	54,380	1,2822	+3,7
8b	49,92	"	2,614	2,60	5508,4	54,435	1,2776	+0,1
8c	49,92	"	1,491	1,496	5509,7	54,422	1,2782	+0,5
17	5,00	"	0,50	0,50	552,6	54,262	1,2816	+3,2
18	50,03	kreisförmig	Durchm.	3,018	5523,9	54,282	1,2791	+1,3
19	50,13	"		3,038	5541,9	54,106	1,2824	+3,8
Mittel: 1,2775								$\pm 2,3$

Außer den geometrischen Abmessungen sind die gemessenen Werte von Frequenz f bzw. elektrischer Wellenlänge λ der Grundeigenschwingung, sowie die daraus nach Formel (4) berechneten Modulwerte s_{11} angegeben; dabei ist für die Dichte d der Werte 2,65¹⁾ eingesetzt. In diese Tabellen haben wir auch eine Anzahl von Stäben, von denen im folgenden nicht weiter

1) Die Zahl dürfte auf weniger als 1 Promille sicher sein; vgl. Landolt-Börnstein, Phys.-Chem. Tabellen, 5. Aufl., I, 1923, S. 308.

die Rede ist, mit aufgenommen, weil das große Beobachtungsmaterial ein Urteil darüber gibt, welche Schwankungen des Dehnungsmoduls bei Kristallstäben auftreten und ferner, in Hinblick auf die technische Anwendung von Quarzstäben als Frequenznormale, mit welcher Zuverlässigkeit die Abmessungen für eine vorgegebene Frequenz vorausberechnet werden können. Sämtliche Stäbe sind geschliffen, aber nicht poliert. Die Querschnitten wurden mit einer Mikrometerschraube an einer größeren Anzahl von Querschnitten, die Längen mit einer Schublehre gemessen; die ersteren erwiesen sich längs der Stäbe meist als ziemlich gleichmäßig, die Schwankungen lagen in der Regel unterhalb 0,005 mm und erreichten im Maximum etwa 0,01 mm. Die Unsicherheit bei der Länge kann z. B. infolge mangelndem Parallelismus der Endflächen auf wenige Hundertstel Millimeter geschätzt werden. An den direkt gemessenen Grundfrequenzen ist, wo es sich als nötig erwies (vgl. § 6) eine kleine Korrektur ϵ nach Formel (12) des § 3 angebracht.

Bei der Bildung der Mittelwerte für s_{11} sind in Tab. 2 die drei eingeklammerten stark herausfallenden Werte nicht berücksichtigt. Die mittlere Schwankung der Modulwerte beträgt $\pm 2,9$ Promille bzw. $\pm 2,3$ Promille bei Stäben I bzw. II, der mittlere Fehler des Mittelwertes also $\pm 0,7$ Promille bzw. $\pm 0,5$ Promille; der kleine Unterschied der Schwankungen in beiden Fällen mag z. T. darauf zurückzuführen sein, daß bei den Stäben II die Meßgenauigkeit in der Frequenz f mit wenigen Ausnahmen 0,1 Promille, bei den Stäben I aber überwiegend nur 1 Promille betrug. Zwischen den Mittelwerten der beiden Tabellen besteht eine Differenz

$$[s_{11}]_{II} - [s_{11}]_I \text{ von } 0,0119 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{Dyn}$$

d. h. die Moduln in der X- und in der Y-Richtung unterscheiden sich um 1 Proz. Wie eine Betrachtung der Spalten 8 und 9 in Tab. 2 und 3 unmittelbar lehrt, kann an diesem auffälligen, der kristallographischen Symmetrie widersprechenden Ergebnis kein Zweifel bestehen; unter 24 Modulwerten von Tab. 3 ist nur ein einziger (1,2693) kleiner als die beiden höchsten Werte (1,2695 und 1,2729) von Tab. 2. Durch Fehler in der Längen- und in der Frequenzmessung kann diese Differenz von 1 Proz. keinesfalls erklärt werden. Andere mögliche Fehlerquellen besprechen wir im folgenden § 6.

§ 6. Einfluß von Orientierungsfehlern und von Verwachsungen;
Korrektion s

Nach Voigt¹⁾ ändert sich der Dehnungsmodul s_{11} in der Y—Z bzw. X—Z-Ebene mit der Richtung nach den Formeln

$$(15) \quad [s_{11}]_I = s_{11} \sin^4 \varphi + (2s_{13} + s_{44}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + s_{33} \cos^4 \varphi + 2s_{14} \cos \varphi \sin^3 \varphi,$$

$$(16) \quad [s_{11}]_{II} = s_{11} \sin^4 \varphi + (2s_{13} + s_{44}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + s_{33} \cos^4 \varphi.$$

An Stelle von s_{11} tritt also für unsere Stäbe I bzw. II der Ausdruck (15) bzw. (16), wenn φ den Winkel der Stabachse gegen die optische Achse bedeutet. Setzt man für die s_{ik} die Werte der Tab. 1 ein, so berechnen sich die in Tab. 4 angegebenen relativen Änderungen des Dehnungsmoduls, wenn φ um $\pm 1^\circ$ bzw. $\pm 5^\circ$ von 90° abweicht.

Tabelle 4

Einfluß von Orientierungsfehlern auf den Dehnungsmodul;
 φ = Winkel der Stabachse gegen die Z-Achse

φ	89° ‰	91° ‰	85° ‰	95° ‰
$\frac{[s_{11}]_I - s_{11}}{s_{11}}$	+ 1,14	- 1,18	+ 5,27	- 6,32
$\frac{[s_{11}]_{II} - s_{11}}{s_{11}}$	- 0,02	- 0,02	- 0,52	- 0,52

Orientierungsfehler beeinflussen hiernach den Modulwert von Stäben I viel stärker als den von Stäben II, für $\varphi = \pm 5^\circ$ ist bei diesen Δs_{11} rund zehnmal kleiner als bei jenen. Die um $1\frac{1}{2}$ Proz. vom Mittel abweichenden (eingeklammerten) Werte in Tabelle 2 sind also offenbar durch ungenaue Orientierung zu erklären. Da nun aber die beobachteten mittleren Modulschwankungen bei Stäben I im übrigen nicht nennenswert größer sind als bei Stäben II, so kommt man zu dem Schluß, daß die von den Herstellerfirmen optisch ausgeführte Orientierung senkrecht zur optischen Achse in der Regel gut gelungen ist, denn der mittlere Orientierungsfehler $\Delta \varphi$ kann für Stäbe I bei einer mittleren Modulschwankung von $\pm 2,9$ Promille nicht

1) W. Voigt, Wied. Ann. 31. S. 718. 1887.

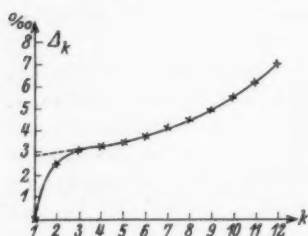
mehr als $\pm 1/4^0$ betragen. Der Modul $[s_{11}]_I$ ändert sich beiderseits der Y-Achse unsymmetrisch; nimmt man also an, daß bei einer größeren Anzahl von Stäben die Winkel φ ebenso häufig nach der einen, wie nach der anderen Seite von 90^0 abweichen, so wird der Mittelwert des Moduls $[s_{11}]_I$ etwas zu klein ausfallen. Da ferner $[s_{11}]_I$ für $\varphi = 90^0$ ein Maximum hat, so bewirken bei Stäben II Orientierungsfehler stets eine Verkleinerung der Modulwerte, aber von viel geringerem Betrage als bei Stäben I. Wenn nun auch die beobachtete Differenz zwischen $[s_{11}]_I$ und $[s_{11}]_I$ von 1 Proz. diesen Verhältnissen dem Sinne nach entspricht, so würde jedoch ihre Größe durch Orientierungsfehler nur dann erklärt werden können, wenn bei Stäben I wesentlich größere Modulschwankungen als bei II aufträten, was nicht beobachtet ist.

Ob die Orientierung I oder II zur X-Achse richtig ist, erkennt man leicht aus dem Aussehen der Leuchterscheinung, denn, wie wir früher gezeigt haben, entstehen bei Schwingungen von Stäben I Flächenladungen mit Höchstwerten im Bewegungsknoten, bei Stäben II aber Raumladungen mit Höchstwerten im Bewegungsbauch. Ist die Stabachse gegen die X- und Y-Achse geneigt, so zeigt das Leuchtbild eine Übereinanderlagerung von Flächen- und Raumladungen, die bei dem größtmöglichen Orientierungsfehler von 15^0 gegen eine Nebenachse sehr deutlich sichtbar ist¹⁾ und daher auch bei viel geringeren Fehlern als 15^0 an Verzerrungen im Leuchtbild erkennbar wäre.

Die Modulschwankungen bei Stäben II, die nach dem vorhergehenden nicht durch Orientierungsfehler erklärt werden können, dürften auf Inhomogenitäten durch Verwachsungen zurückzuführen sein. Wie eine nähere Betrachtung der in den Tabellen 7—14 des § 9 enthaltenen Resultate lehrt, ergeben die Messungen in einzelnen Fällen bei den niedrigsten Oberschwingungen $k = 2$ und 3 auffallend große Harmonieabweichungen, wenn man als Bezugsfrequenz den gemessenen Wert der Grundfrequenz gemäß Formel (9) wählt. Ein besonders auffallendes Beispiel hierfür zeigt Tab. 7: für die Ordnungen $k = 1$ bis 4 sind hier die Frequenzen 54, 580, 108,89, 163,21, $217,63 \cdot 10^3$ Hz gemessen, ihre ganzzahligen Bruchteile berechnen sich für $k = 2, 3, 4$ bzw. zu 54,445, 54,403, $54,401 \cdot 10^3$ Hz

1) Vgl. das Photo Fig. 7 in unserer Arbeit, Ztschr. f. Phys. 45. S. 620. 1928.

und die Harmonieabweichungen Δ_k demnach zu 2,5 Promille, 3,2 Promille, 3,2 Promille. Die dritte und vierte Oberschwingung stehen also fast genau im harmonischen Verhältnis 3:4, entsprechen aber einer Grundfrequenz, die um 3,2 Promille tiefer ist, als die tatsächlich gemessene. Die Kurve, welche die Werte Δ_k als Funktion von k darstellt (Fig. 1) hat etwa bei $k=3$ einen ziemlich scharfen Knick, während sie oberhalb $k=4$ stetig verläuft. Daß dieser Kurvenverlauf keine grundsätzliche Bedeutung hat, sondern durch irgendwelche Anomalien bedingt wird, ist von vornherein wahrscheinlich und durch folgende Beobachtungstatsachen bewiesen: 1. bei einzelnen Stäben ist



Anomalien
bei niedrigsten Eigenfrequenzen
Stab II Nr. 8c
(50 × 1,5 × 1,5 mm)

Fig. 1

dieser Knick in der Δ_k -Kurve überhaupt nicht vorhanden oder nur schwach angedeutet; 2. zwei Kreisstäbe (Tab. 13) von gleichen Abmessungen verhalten sich verschieden; bei dem einen biegt die Kurve bei $k=3-4$ nach unten ab, wie in Fig. 1, bei dem anderen aber nach oben. Es handelt sich also um eine individuelle Eigenschaft jeden Stabes, die auf Inhomogenitäten durch Verwachsungen zurückzuführen sein dürfte. Verwachsungen können allerdings nur in geringfügigem Maße und örtlich ziemlich eng begrenzt vorhanden sein, einmal, weil alle Stäbe von den Lieferfirmen optisch auf Homogenität untersucht sind, zweitens weil beträchtliche Verwachsungen durch Unregelmäßigkeiten in der Leuchterscheinung unmittelbar sichtbar werden müssen. In einigen wenigen Fällen gaben in der Tat Verzerrungen des Leuchtbildes den augenscheinlichen Beweis einer Inhomogenität; beim kreisförmigen Stab Nr. 18 z. B., für den auch die Anomalie der niedrigsten Eigenfrequenzen groß ist, war diese Verzerrung bei allen Oberschwingungen an einer und derselben Stelle des Stabes sichtbar, und der Stab Nr. 1 (Tab. 13), der auch andere Anomalien zeigte, leuchtete an einem kurzen Stück seiner Länge überhaupt nicht (vgl. Fig. 5 am linken Stabende). Jedoch war in anderen Fällen

mit stark anormalem Wert der Grundfrequenz das Aussehen der Leuchtfigur in allen Ordnungen regelmäßig. Daß bei der starken Richtungsabhängigkeit der Elastizitätsmoduln beim Bergkristall auch geringfügige Verwachsungen den Wert des Dehnungsmoduls beeinflussen, ist verständlich; weniger einleuchtend ist vielleicht, daß die Inhomogenitäten anscheinend nur die zwei oder drei niedrigsten Eigenfrequenzen merklich beeinflussen. Aber wie dies auch zu erklären sei, jedenfalls darf man offenbar bei der Berechnung der Harmonieabweichungen aus den Beobachtungen nicht in allen Fällen die beobachtete Grundfrequenz F_1 als Bezugsfrequenz wählen, sondern einen anderen Wert f , der sich in einfachster Weise nach Fig. 1 aus der graphischen Extrapolation des oberhalb $k = 4$ stetigen Kurvenzuges bis zur Abszisse $k = 1$ berechnet; die zugehörige Ordinate ergibt dann in Promille die Korrektur ε , die, an den beobachteten Grundfrequenzen angebracht, den Wert der „idealen“ Bezugsfrequenz f gemäß Formel (12) liefert, mit welchem sowohl in den Tabellen 2 und 3 als auch im folgenden stets gerechnet wurde. Ein etwas genaueres Verfahren zur Ermittlung von ε wird im folgenden Paragraph besprochen. Die Größe dieser Korrektur, die teils positives, teils negatives Vorzeichen hat, ist für eine Anzahl von Stäben II aus Tab. 16 ersichtlich, sie ist übrigens in vielen Fällen 0 oder nahezu gleich Null. Bei Stäben I haben wir (mit einer einzigen Ausnahme) die Korrektur ε nicht angebracht, weil hier durch besondere Umstände, wie wir sehen werden, das Harmoniegesetz erheblich gestört ist und deshalb die Mehrzahl der Frequenzmessungen nur mit einer Genauigkeit von 1 Promille ausgeführt wurde. Daß die mit der idealen Bezugsfrequenz $f = F_1 (1 - \varepsilon)$ berechneten Modulwerte s_{11} besser untereinander übereinstimmen als die aus den beobachteten Grundfrequenzen F_1 , also ohne Korrektur sich ergebenden, mag an einem auch in anderer Hinsicht bemerkenswerten Beispiel gezeigt werden. Von den drei Stäben Nr. 8a, 8b, 8c sind die beiden letzteren durch sukzessives Abschleifen der Querdimensionen aus dem ersten hergestellt. Die Stablänge ist also in den drei Fällen genau die gleiche, die niedrigsten Eigenfrequenzen, bei denen der Einfluß der Querdimensionen noch sehr klein ist, müßten also sehr nahe gleich groß sein. Die Messungen haben demgegenüber die in Tab. 5 zusammengestellten Resultate ergeben. Die Grund-

Tabelle 5

Einfluß von Verwachsungen, Änderung der Grundfrequenz eines Stabes durch Dünnerschleifen, Modulwerte s_{11} mit und ohne Inhomogenitätskorrektur

Stablänge 50 mm

1	2				3	4	5
Stab - Nr. und Abmessungen mm	Gemessene Eigenfrequenzen für				Inhomo- genitäts- korrek- tion ε o/o	s_{11} in CGS, berechnet aus Grundfrequenz $k = 1$	
	$k = 1$ kHz	$k = 2$ kHz	$k = 3$ kHz	$k = 4$ kHz		ohne ε	mit ε
8a $S_y = 2,6, S_z = 3$	54,466	108,81	163,17	217,42	+ 0,7	$\cdot 10^{-12}$ 1,2761	$\cdot 10^{-12}$ 1,2779
8b $S_y = S_z = 2,6$	54,525	108,89	163,21	217,46	+ 1,6 ₅	1,2732	1,2774
8c $S_y = S_z = 1,5$	54,580	108,89	163,21	217,63	+ 2,9	1,2707	1,2781
Mittel							1,2778

frequenzen zeigen große, die Meßgenauigkeit um das Zehnfache übersteigende Unterschiede bis zu 2,1 Promille, die Eigenfrequenzen der Ordnung $k = 2$ wesentlich kleinere, diejenigen der Ordnung $k = 3$ sind nahezu identisch, während sich bei $k = 4$ bereits der Einfluß der verschiedenen Querdimensionen geltend macht. Die Größe der Korrektur ε ändert sich nur durch das Abschleifen vom Betrage 0,7 auf 2,9 Promille, die Inhomogenität wird also irgendwie verändert. Aus den beobachteten Grundfrequenzen ergeben sich Modulwerte s_{11} (Spalte 4), die z. T. extrem klein sind und bis zu 4,2 Promille voneinander abweichen. Die Berücksichtigung der Korrektur ε reduziert diese Abweichungen auf fast den zehnten Teil (Spalte 5) und führt zu einem Mittelwert von s_{11} , der mit demjenigen der Tab. 3 übereinstimmt. Aus diesem Sachverhalt, für den sich übrigens aus unserem gesamten Beobachtungsmaterial noch andere Beispiele entnehmen ließen, scheint uns die Notwendigkeit der Korrektur ε wohl begründet; eine weitere Stütze hierfür ergab sich aus der experimentellen Prüfung der Ähnlichkeitsgesetze in dem folgenden § 11.

Die Erfahrung, daß die besprochene Anomalie bei dünnen Stäben größer ist als bei dicken, haben wir auch noch in anderen

Fällen gemacht. Dies zeigen besonders deutlich die Messungen an dem sehr dünnen Stabe Nr. 11b (Tab. 11), der aus dem Stabe Nr. 11a (Tab. 11) durch Abschleifen der Seite S_z von 1,5 auf 0,75 mm hergestellt wurde. Die Eigenfrequenzen beider Stäbe stimmen in den Ordnungen $k = 2, 3, 4$ nahezu überein. Beim dickeren Stab ist auch die Grundeigenfrequenz (innerhalb der Meßgenauigkeit von hier nur 1 Promille) normal, nicht aber diejenige des dünnen Stabes. Bei diesem wurden in der Ordnung $k = 1$, als Folgeerscheinung von Verwachsungen (vgl. hierzu § 10) zwei Eigenfrequenzen 1a und 1b von $f_a = 91,00$ und $f_b = 91,59 \cdot 10^3$ Hz beobachtet, die sich um 6,6 Promille unterscheiden. Die Frequenz f_a , deren Wert nahezu normal und gleich der Grundfrequenz des dicken Stabes 11a ist, war nur sehr schwer und unsicher, die anormale f_b hingegen sehr leicht und mit völlig einwandfreiem Leuchtbild anregbar. Die Korrektion ϵ hat für f_a den Betrag 1,2 Promille, für f_b aber den sehr hohen Wert 7,8 Promille.

Für eine möglichst genaue Bestimmung des Moduls s_{11} ist es nach diesen Erfahrungen zweckmäßig, nicht zu dünne Stäbe zu wählen und nicht die Grundschwingung sondern die dritte oder vierte Oberschwingung zu messen.

Endlich sei bemerkt, daß auch bei Torsionsschwingungen, über die wir in einer späteren Arbeit berichten werden, die Grundeigenfrequenzen z. T. anormale Werte in bezug auf die Reihe der höheren Oberschwingungen haben.

§ 7. Einfluß der sekundären elektrischen Felder.

Schlußresultat für den Modul s_{11}

Nach § 6 dürften die beobachteten kleinen Modulschwankungen auf Orientierungsfehler und auf Inhomogenitäten durch Verwachsungen zurückzuführen sein. Bei Anbringung der besprochenen Korrektion ϵ , die dem Einfluß von Inhomogenitäten bis zu einem gewissen Grade Rechnung trägt, wird man für jeden einzelnen Stab einen mittleren Modulwert erhalten, der aber natürlich bei verschiedenen Stäben etwas anders ausfällt. Auf keine der beiden genannten Ursachen kann jedoch der beobachtete Unterschied von 1 Prozent zwischen dem Modulwert $[s_{11}]_I$ und $[s_{11}]_{II}$ beider Stabsorten I und II zurückgeführt werden. Eine Erklärung hierfür dürfte vielmehr in folgendem

zu suchen sein: die Schwingung eines piezoelektrischen Stabes ist kein rein elastischer, sondern ein elektroelastischer Vorgang, weil durch die Deformationen des schwingenden Stabes sekundär elektrische Felder entstehen, die ihrerseits Deformationen erzeugen. Die Größe dieser sekundären Deformationen kann man durch die folgende Näherungsrechnung abschätzen. Ein parallelepipedischer Stab der Orientierung I werde durch eine in Richtung seiner Achse (Y-Richtung) wirkende konstante Kraft P gedehnt, dann entstehen auf Belegungen, welche die zur X-Richtung senkrechten Stabflächen bedecken, entgegengesetzt gleiche Ladungen, die nach den Gesetzen der Piezoelektrizität den Betrag

$$(17) \quad e = d_{11} P \frac{L_y}{S_x}$$

haben. ($d_{11} = 6,35 \cdot 10^{-8}$ CGS piezoelektr. Modul, S_x , S_y Querschnittseiten, L_y Stablänge, vgl. § 3). Die Kapazität zwischen den Belegungen ist

$$(18) \quad C = \frac{\kappa S_x L_y}{4 \pi S_y}$$

wenn $\kappa = 4,4$ die Dielektrizitätskonstante des Quarzes senkrecht zur optischen Achse bedeutet. Die Potentialdifferenz der Belegungen wird also

$$(19) \quad V = \frac{e}{C} = \frac{4 \pi d_{11} P}{\kappa S_y}$$

Vermöge des reziproken Piezoeffektes bewirkt diese Spannung eine Änderung der Länge vom Betrage

$$(20) \quad l' = d_{11} V \frac{L_y}{S_x} = \frac{4 \pi d_{11}^2}{\kappa} \cdot \frac{P}{S_x S_y} L_y.$$

Die Kraft P ruft primär eine elastische Längenänderung der Größe

$$(21) \quad l'' = s_{11} \frac{P}{S_x S_y} L_y$$

hervor. Da die piezoelektrisch erzeugte Längenänderung l' der elastischen l'' stets entgegen wirkt, so wird die gesamte Längsdilatation

$$(22) \quad \frac{l'' - l'}{L_y} = \frac{P}{S_x S_y} \left(s_{11} - \frac{4 \pi d_{11}^2}{\kappa} \right).$$

Der Klammerausdruck stellt also den durch die piezoelektrischen Sekundärwirkungen veränderten, gegenüber s_{11} ver-

kleinerten Elastizitätsmodul eines Quarzstabes der Orientierung I dar. Zu dem gleichen Resultat kommt man auch für Stäbe der Orientierung II (bei kleiner Länge), die in der X-Richtung gedehnt werden, im *statischen* Fall. Ganz andere Verhältnisse liegen aber bei Schwingungen vor, weil hier die piezoelektrischen Ladungen für die beiden Stabsorten nach Art und Verteilung ganz verschiedene sind. Bei der Grundschwingung von Stäben I entstehen, entsprechend wie bei statischer Deformation, Flächenladungen, die vom Maximalwert in der Stabmitte nach den Stabenden zu sinusförmig abnehmen. Bei Stäben II aber treten Raumladungen auf, die in der Stabmitte Null sind und nach beiden Stabenden hin bis zu entgegengesetzt gleichen Maximalwerten ansteigen. Die elektrische Feldstärke im Quarz ist aus diesem Grunde in dem letzten Fall wesentlich kleiner als im ersten, so daß der dynamische Sekundäreffekt bei Stäben II, der sich übrigens rechnerisch nicht in einfacher Weise abschätzen ließe, wesentlich kleiner als bei Stäben I sein dürfte. Dagegen wird für diese die Sekundärwirkung auch bei Schwingungen durch das oben abgeleitete Resultat im wesentlichen richtig abgeschätzt sein. Durch Einsetzen der Zahlenwerte ergibt sich

$$\frac{4 \pi d_{11}^2}{x} = 0,0115 \cdot 10^{-12}.$$

Dies stimmt, wenn wir den Sekundäreffekt bei Stäben II als verschwindend klein annehmen, mit der experimentell in § 5 gefundenen Differenz $[s_{11}]_{II} - [s_{11}]_I = 0,0119 \cdot 10^{-12}$ fast genau überein. Diese Übereinstimmung mag bei dem Näherungscharakter der obigen Rechnung zufällig sein, doch dürfte die berechnete Größenordnung des Sekundäreffektes und die Erklärung für die beobachtete Modulldifferenz zutreffend sein. Hiernach erscheint es möglich, daß sich der wirksame Elastizitätsmodul mit der Ordnungszahl der Oberschwingungen ein wenig ändert, weil sich zugleich das sekundäre elektrische Gesamtfeld des Stabes ändert.

Praktisch muß man also für die Vorausberechnung der für eine vorgegebene Frequenz notwendigen Stablänge je nach Orientierung I oder II verschiedene Modulwerte benutzen. Bezeichnet u die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{1}{\sqrt{[s_{11}]d}}$ der Dehnungsschwingungen ($[s_{11}]$ = wirksamer Modul), so gilt für die

Frequenz f der Grundschiwingung eines Quarzstabes der Länge L und für die entsprechende elektrische Wellenlänge:

$$(23) \quad \begin{cases} f = \frac{u}{2L} = \frac{c}{L} \\ \lambda = \frac{v}{u} 2L = CL. \end{cases}$$

Als Schlußresultate unserer Messungen sind in der Tab. 6 die numerischen Werte von $[s_{11}]$, u , c , C sowie des Moduls $E = \frac{1}{[s_{11}]}$ in den technisch gebräuchlichen Einheiten, kg-Gew. mm² für beide Staborientierungen I und II zusammengestellt. (Lichtgeschwindigkeit $v = 2,9980 \cdot 10^{10}$ cm/sec.)

Tabelle 6

Elastizitätsmoduln $[s_{11}]$ bzw. $E = 1/[s_{11}]$, Fortpflanzungsgeschwindigkeit u und Konstanten c und C der Formeln 23 für Quarzstäbe der Orientierungen I und II

Orien- tierung	$[s_{11}]$ cm ² /Dyn	E kg-Gew./mm ²	u cm/sec	c cm/sec	C
I	$\cdot 10^{-12}$ 1,2656	8054	$\cdot 10^3$ 5460,5	$\cdot 10^5$ 2,7303	$\cdot 10^5$ 1,0981
II	1,2775	7979	5435,0	2,7175	1,1032

Die Zahlen der Tab. 6 gelten für Raumtemperatur um 20° C. Nach früheren Messungen von uns¹⁾ beträgt der Temperaturkoeffizient von s_{11} etwa $10 \cdot 10^{-6}$, derjenige der Frequenz von Stäben I etwa $-2 \cdot 10^{-6}$, beide Beträge sind also außerordentlich klein. Nach dem Ergebnis der Tabellen 2 und 3 des § 5 kann der wahrscheinliche Fehler in s_{11} zu etwa 0,5 Promille angesetzt werden. Für eine gegebene Länge L ist die Frequenz f (bzw. λ) der Grundschiwingung aus den Daten der Tab. 6 nach den Formeln (23) mit einer Sicherheit von 1 bis 1,5 Promille berechenbar, solange die Quarzstäbe nur geringfügige Verwachsungen aufweisen.

Unser Resultat für $[s_{11}]_I$ bzw. $[s_{11}]_I$, weicht von dem Voigtschen Wert (Tab. 1) um 2,3 bzw. 1,4 Proz. ab, außerhalb unserer und der von Voigt angegebenen (etwa 1 Promille) Meßgenauigkeit. Da die geringe Differenz zwischen dem adiabatischen und isothermen Modulwert bereits berücksichtigt ist, so sollte man meinen, daß der Unterschied auf die Verschiedenheit der

1) E. Giebe u. A. Scheibe, Jahrb. d. drahtl. Telegr. 35. S. 174. 1930.

Methoden zurückzuführen sei. Jedoch haben neuere sehr sorgfältige Bestimmungen von Perrier und Mandrot¹⁾ nach der statischen Biegemethode den Wert

$$s_{11} = 1,2696 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^2/\text{Dyn bei } 15^\circ \text{ C}$$

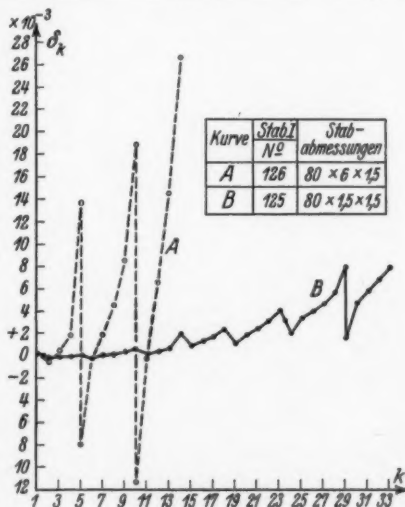
ergeben, der zwischen unseren Werten $[s_{11}]_I$ und $[s_{11}]_{II}$ liegt. Diese Zahl ist der Mittelwert von 20 Einzelmessungen an zwei verschiedenen Stäben; die größten Abweichungen vom Mittel betrugen $-3,8$ Promille und $+7,5$ Promille. Die Orientierung entsprach unserer Orientierung II.

**§ 8. Harmonieabweichungen bei Stäben I und II,
in einigen typischen Kurven dargestellt;
Vergleichung mit Rayleighs Dickenkorrektur**

Einen Überblick über die Größe der Harmonieabweichungen δ_k für einige Stäbe verschiedenen Querschnitts als Beispiele

und ihre Änderungen mit der Ordnungszahl k geben die Kurven Fig. 2, 3 und 6 (A).

Zunächst ist der Unterschied in dem Verhalten der beiden Stabsorten I und II in die Augen springend. Bei Stäben II (Fig. 3) liegen die einzelnen Meßpunkte so genau auf stetigen Kurvenzügen, daß die geringen Abweichungen von diesen im Maßstab der Fig. 3 nicht wahrnehmbar sind. Die Meßpunkte sind deshalb nicht mit eingezeichnet. Demgegenüber zeigt Fig. 2

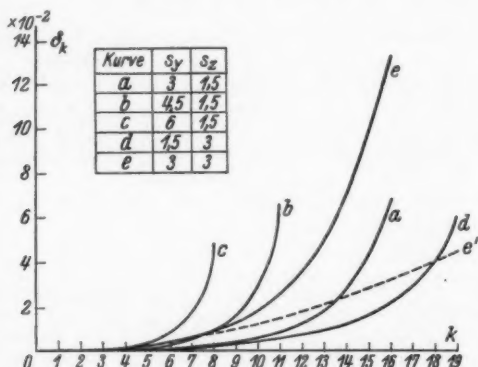


Harmonieabweichungen
bei Stäben der Orientierung I

Fig. 2

1) A. Perrier u. R. de Mandrot, Mem. Soc. Vaudoise des Sciences Nat. 1. S. 333. 1923. Die dort angegebene Zahl haben wir auf CGS-Einheiten umgerechnet und mit der Differenz A—J unserer Tab. 1 korrigiert.

und 6 A Zickzacklinien, also Harmonieabweichungen, die periodisch zu- und wieder abnehmen, und um so stärker schwanken, je größer die Stabdicke ist und sogar zum Teil negatives Vorzeichen haben; in einzelnen Fällen sind bei gleicher Ordnungszahl zwei Eigenfrequenzen beobachtet. Es handelt sich hierbei nicht etwa um individuelle Eigenschaften eines Stabes¹⁾, denn bei drei verschiedenen Stäben I von den gleichen Abmessungen $80 \cdot 3 \cdot 1,5$ mm waren die Schwankungen von δ_k in allen Ordnungen genau die gleichen. Wir werden



Harmonieabweichungen bei rechteckigen Stäben der Orientierung II.
 Stablänge 50 mm; Querschnittsseiten S_y und S_z in mm;
 e' theoretische Kurve nach Rayleigh für Stab $S_y = S_z = 3$

Fig. 3

in § 10 auf die wahrscheinliche Ursache dieses komplizierten Verhaltens näher eingehen, das offenbar nicht unmittelbar durch die endliche Stabdicke bedingt sein und natürlich durch die Rayleighsche Dickenkorrektur keinesfalls gedeutet werden kann.

Wesentlich einfacher als die Stäbe I verhalten sich die Stäbe II (Fig. 3). Daß die Harmonieabweichungen δ_k mit zunehmender Ordnung, also je näher die elastische Halbwellen-

1) Dies eigentümliche Verhalten glaubten wir früher, ETZ. 47. S. 284, als wir nur einen einzigen Stab durchgemessen hatten, auf Inhomogenitäten zurückführen zu müssen, davon kann nach den jetzigen Erfahrungen nicht die Rede sein.

länge von der Größe der Querdimensionen wird, stetig zunehmen, ist qualitativ unmittelbar verständlich. Auch die Änderungen der δ_k bei den drei gleichlangen Stäben (Kurven a , b , c), deren größere Querschnittsseiten S_y bei gleichbleibender kleiner Seite S_z im Verhältnis 2:3:4 stehen, mit zunehmender Größe von S_y bei derselben Ordnung k , entsprechen qualitativ durchaus der Erwartung. Doch ist der sehr steile Anstieg aller Kurven bei den höchsten Ordnungen auffallend, ebenso die relativ hohen Beträge der Harmonieabweichungen beim quadratischen Stabe (Kurve e). Auch bei der Stabsorte I nehmen zwar die Abweichungen δ_k im ganzen genommen mit k zu, was am deutlichsten bei dem dünnsten Stab B (Fig. 2) hervortritt, doch ist dieser Anstieg von einem anderen störenden Einfluß sehr stark überdeckt. Ein allgemeingültiges Seriengesetz der Dehnungsschwingungen können wir empirisch offenbar nur aus Messungen an Stäben II ableiten; mit diesen werden wir uns daher in dem folgenden Paragraph hauptsächlich beschäftigen.

Zur Prüfung der Rayleighschen Theorie des Dickeneinflusses haben wir nach der auf dieser Theorie beruhenden Formel (8) für einen quadratischen Stab von $L_z = 50$, $S_y = S_z = 3$ mm mit Hilfe der in Tab. 1 angegebenen Modulwerte die Harmonieabweichungen berechnet. Das Resultat ist in der gestrichelten Kurve e' der Fig. 3 graphisch dargestellt. Die Vergleichung mit der für den gleichen Stab beobachteten Kurve e lehrt, daß oberhalb etwa $k = 8$ die Rayleighsche Dickenkorrektur auch nicht mehr annähernd dem experimentellen Befund gerecht wird. Nur bei niedrigen Ordnungen $k < 8$, d. h. bei sehr kleinen Harmonieabweichungen unterhalb von etwa 1 Proz. liefert die Formel (8) ungefähr richtige Werte, nämlich für $k = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ die Beträge $(\delta_k)_{\text{ber.}} = 1,2, 2,1, 3,2, 4,6, 6,3, 8,2$ Promille gegenüber $(\delta_k)_{\text{beob.}} = 0,7, 1,4, 2,5, 4,1, 6,3, 9,2$ Promille, also bis zu $k = 6$ etwas zu große Werte. Oberhalb $k = 7$ ergibt jene Formel zu kleine Harmonieabweichungen und bei den höchsten Ordnungen nicht einmal die Größenordnung richtig¹⁾.

1) In einer kürzlich erschienenen Arbeit (Phys. Rev. **36**, S. 935. 1930) kommt D. S. Muzzey aus Messungen der longitudinalen Eigenfrequenzen von ferromagnetischen, kreiszylindrischen Stäben, die durch Magnetostriktion angeregt wurden, zu einer Bestätigung der Rayleighschen

Auch noch in anderer Beziehung wird die Formel (8) den Beobachtungen nicht gerecht, wie aus dem Vergleich der beiden Kurven *a* und *d* der Fig. 3 hervorgeht. Diese Kurven gelten für zwei Stäbe von genau den gleichen Abmessungen, die sich nur dadurch unterscheiden, daß die größere Querdimension in dem einen Fall parallel, im anderen senkrecht zur optischen Achse liegt. Wegen der geringen Differenz zwischen den Moduln s_{12} und s_{13} von nur 10 Proz. (vgl. Tab. 1) unterscheiden sich nämlich die beiden Klammerausdrücke $s_{12}^2 + \frac{1}{4}s_{14}^2$ und $s_{13}^2 + \frac{1}{4}s_{14}^2$ in Formel (8) nur rund um 8 Proz. Aus dieser Formel erhält man daher rechnerisch für jene beiden Stäbe sehr nahe die gleichen Harmonieabweichungen, während die Messungen bei hohen Ordnungen sehr erhebliche Unterschiede ergeben, z. B. für $k = 16$ 2,2 Proz. im Fall der Kurve *d* gegenüber 6,3 Proz. in Kurve *a*. Also auch der Einfluß der Orientierung der Querschnittsseiten zu den Kristallachsen auf die Größe der Harmonieabweichungen ist tatsächlich ganz anders als in Formel (8). In den Beispielen Fig. 2 für Stäbe I liegt die größere Querschnittsseite parallel zur optischen Achse; steht sie senkrecht dazu, so haben die Kurven δ_k als Funktion von k ganz ähnlichen stetigen Verlauf wie bei Stäben II in Fig. 3. Periodische Schwankungen der δ_k wie in Fig. 2 treten also dann nicht auf, wenigstens wenn $S_x:S_z \geq 2:1$ ist, oder sind nur angedeutet, vgl. hierzu § 10.

§ 9. Tabellen der beobachteten Harmonieabweichungen

In den folgenden Tabellen 7—14 ist das an einer größeren Anzahl von Stäben verschiedener Abmessungen gewonnene Beobachtungsmaterial mitgeteilt; es diente als Grundlage für die im folgenden entwickelte neue Theorie der Dehnungsschwingungen von Stäben endlicher Dicke und für die analytische Formulierung eines Seriengesetzes. Da wir ein solches Gesetz nur empirisch mit einer gewissen Näherung ableiten konnten, so schien es uns angebracht, für eine spätere strenge theoretische Behandlung des Problems ausgiebiges Zahlen-

Dickenkorrektur; dabei betrug das Verhältnis des Durchmessers zur Länge des Stabes bzw. der elastischen Welle höchstens 0,6. Dies widerspricht unserem Ergebnis nicht, weil die Abweichungen zwischen Beobachtung und Rayleighs Dickenkorrektur erst oberhalb von etwa 0,6, wo die Harmonieabweichungen mehr als 1 Proz. betragen, groß werden (vgl. Fußnote S. 66).

Ord-
nungs-
zahl

k

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33

material zur Verfügung zu stellen, das bisher nicht vorhanden war. Aus den im § 8 angegebenen Gründen sind hauptsächlich Stäbe der Orientierung II (Tabellen 7—13) und nur wenige (Tab. 14) der Orientierung I untersucht. Für einen Stab II als

Tabelle 7

Stab II, Nr. 8c. $L_x = 49,92$, $S_y = 1,491$, $S_z = 1,496$.

Meßgenauigkeit 0,1 Promille

1	2	3	4	5	6	7	8
Ordnungszahl 							

Tabelle 8

Stäbe II Nr. 8a, 8b, 16

 δ_k in Promille. $L_z = 50$ mm. Meßgenauigkeit 0,1 Promille

k	Nr. 16, $S_y = S_z = 3$ mm			Nr. 8b, $S_y = S_z = 2,6$ mm			Nr. 8a, $S_y = 2,6$ mm $S_z = 3$ mm	
	beob.	δ_k ber. nach Ser.-Ges.		beob.	δ_k ber. nach Ser.-Ges.		beob.	δ_k ber. nach Ser.-Ges.
		I	II		I	II		I
1	0,2	0,1	0	-1,7	0,1	0	-0,7	0,1
2	0,4	0,3	0,2	-0,2	0,2	0,1	0,4	0,3
3	0,7	0,8	0,7	0,6	0,6	0,4	0,7	0,7
4	1,4	1,5	1,5	1,3	1,1	1,0	1,3	1,3
5	2,5	2,6	2,6	2,1	1,9	1,8	2,2	2,2
6	4,1	4,1	4,3	3,2	3,0	3,0	3,6	3,5
7	6,3	6,3	6,4	4,6	4,5	4,5	5,1	5,2
8	9,2	9,3	9,3	6,5	6,4	6,4	7,4	7,5
9	13,2	13,2	13,2	8,9	9,0	8,9	10,4	10,3
10	18,6	18,7	18,5	12,2	12,2	12,1	14,2	14,2
11	26,1	26,0	25,6	16,4	16,7	16,2	19,1	19,1
12	36,6	36,2	35,5	22,0	22,4	21,6	25,7	25,5
13	51,8	50,3	49,7	29,4	29,8	28,7	34,8	33,9
14	68,6 171,7	70,1	70,0	39,4	39,7	38,4	46,9	45,0
15	99,5	98,6	98,5	53,1	52,8	51,5	61,6	63,6
16	132,5	139,2	136,3	73,1	69,7	69,5	83,3	78,4
17				94,1	93,4	93,7	106,5	104,3
18				121,9	125,3	125,1	135,1	139,4
19				152,2	171,0	163,6	162,9	188,7

Tabelle 9

Stab II Nr. 17

 $L_z = 5$, $S_y = S_z = 0,5$ mm. δ_k in Promille. Meßgenauigkeit 1 Promille

k	λ_k m	F_k kHz	δ_k beob.	δ_k ber. nach Ser.-Ges.	
				I	II
1	552,6	542,6	0	0,2	0,1
3	184,5	1625,2	1,6	2,6	2,6
5	111,8	2683	11,2	10,6	10,6
7	81,45	3681	31,9	33,0	32,0

Beispiel ist in Tab. 7 das Zahlenmaterial in ausführlicherer Form mitgeteilt als in den übrigen Tabellen, um den Frequenzbereich zu zeigen, in welchem sich die untersuchten Vorgänge abspielen; hier sind die beobachteten Frequenzen F_k (Spalte 4), die ihnen entsprechenden elektrischen Wellenlängen λ_k (Spalte 3) und die harmonischen Frequenzwerte $k \cdot f$ (Spalte 5) angegeben.

Tabelle 10

Stäbe II Nr. 10, 13, 14

 $L_x = 50$, $S_x = 1,5$ mm. δ_k in Promille. Meßgenauigkeit 0,1 Promille

		Nr. 10, $S_y = 3$ mm			Nr. 13, $S_y = 4,5$ mm			Nr. 14, $S_y = 6$ mm		
k	$\frac{L_x}{k}$	beob.	δ_k		beob.	δ_k		beob.	δ_k	
			ber. nach Ser.-Ges.			ber. nach Ser.-Ges.			ber. nach Ser.-Ges.	
			I	II		I	II		I	II
1	50	0,2	0	0	0	0	0	0,2	0,1	0
2	25	0,2	0,1	0,1	0,2	0,2	0,1	0,3	0,3	0,3
3	16,7	0,3	0,2	0,2	0,5	0,4	0,4	0,8	0,8	0,9
4	12,5	0,4	0,5	0,5	1,0	0,9	1,0	10,5 13,0	1,8	2,1
5	10,0	0,9	0,8	0,9	1,9	1,7	1,9	3,9	3,9	4,1
6	8,33	1,3	1,3	1,5	3,2	3,0	3,3	8,2	8,4	8,2
7	7,15	2,1	2,0	2,2	5,4	5,3	5,5	18,3	18,8	18,0
8	6,25	3,4	3,0	3,2	9,1	9,4	9,2	49,4	47,6	49,5
9	5,56	4,5	4,4	4,5	16,3	16,8	16,2	—	—	—
10	5,00	6,5	6,3	6,4	31,8	32,1	31,8	—	—	—
11	4,55	9,3	9,0	8,9	66,7	66,7	68,9	—	—	—
12	4,17	12,5	12,9	12,5	—	—	—	—	—	—
13	3,85	18,1	18,6	17,9	—	—	—	—	—	—
14	3,57	27,1 26,3	27,3	25,9	—	—	—	—	—	—
15	3,33	40,8	40,5	41,4	—	—	—	—	—	—
16	3,13	63,3	61,7	66,6	—	—	—	—	—	—

Tabelle 11

Stäbe II, Nr. 11a, 11b, 12. $S_x = 3$ mm. δ_k in Promille

Meßgenauigkeit bei Nr. 11a und 12: 1 Promille

bei Nr. 11b: 0,1 Promille

	Nr. 11 a, $L_x = 30$ mm $S_x = 1,5$ mm			Nr. 11 b, $L_x = 30$ mm $S_x = 0,75$ mm			Nr. 12, $L_x = 20$ mm $S_x = 1,5$ mm		
k	δ_k		beob.	δ_k		beob.	δ_k		beob.
	ber. nach Ser.-Ges.			ber. nach Ser.-Ges.			ber. nach Ser.-Ges.		
	I	II		I	II		I	II	
1	0	0,1	0,1	-1,2 ¹⁾	0	0	0	0,2	0,2
2	-1,3	0,3	0,3	-1,2	0,2	0,2	-0,5	0,8	0,9
3	0,2	0,8	1,0	0	0,5	0,6	1,8	2,5	2,5
4	1,5	1,8	2,0	1,0	1,1	1,2	3,6	6,4	6,4
5	4,5	3,5	3,7	2,3	2,2	2,5	14,3	15,8	15,0
6	7,1	6,4	6,5	4,2	4,1	4,4	40,0	41,0	41,4
7	10,3	11,8	11,2	7,7	7,8	7,5	—	—	—
8	20,6	21,6	20,5	15,4	14,9	14,2	—	—	—
9	41,0	41,7	42,5	31,5	31,0	30,5	—	—	—
10	84,9	87,8	89,0	73,3	73,0	71,0	—	—	—

1) Für $k = 1$ ist hier ein Dublett beobachtet, $F_1 = 91,59$ bzw. 91,00 kHz; die Korrektur ε ist auf die niedrigere Frequenz bezogen.

Tabelle 12

Stäbe II, Nr. 3b, 4, 6b, 7

 $L_e = 50$, $S_y = 1,5$ mm. δ_k in Promille. Meßgenauigkeit 0,1 Promille

k	$\frac{L_e}{k}$	Nr. 3b $S_y = 3$ mm	Nr. 4, $S_y = 3$ mm	Nr. 6b, $S_y = 4,5$ mm	Nr. 7, $S_y = 6$ mm
		δ_k beob.	δ_k beob. δ_k ber. nach Ser.-Ges. I	δ_k beob. δ_k ber. nach Ser.-Ges. I	δ_k beob. δ_k ber. nach Ser.-Ges. I
1	50	0	-0,4	0	0
2	25	0,2	+0,1	0,1	0,1
3	16,7	0,2	0,3	0,2	0,2
4	12,5	{ +5,9 -0,5	{ +0,6 -0,8	0,4	0,4
5	10	+0,4	+0,6	0,7	0,8
6	8,33	0,9	1,1	1,0	1,4
7	7,14	0,9	1,4	1,6	2,3
8	6,25	2,1	2,6	2,2	3,7
9	5,56	2,9	3,5	3,1	5,8
10	5,00	3,6	4,4	4,2	9,9
11	4,55	5,1	6,0	5,6	15,7
12	4,17	7,4	8,2	7,5	31,1
13	3,85	8,8	9,9	9,8	—
14	3,57	{10,8 12,0 10,5	12,8	12,9	—
15	3,33	15,8	17,0	17,0	—
16	3,13	19,5	21,3	22,1	—
17	2,94	27,7	29,1	29,0	—
18	2,78	38,8	40,4	38,2	—
19	2,63	58,7	60,1	50,1	—

Die den relativen Frequenzdifferenzen, den Harmonieabweichungen δ_k , entsprechenden absoluten sind aus der Differenz der Zahlen von Spalte 4 und 5 zu entnehmen.¹⁾ Man erkennt

1) Da bei hohen Ordnungszahlen k die Differenz zwischen F_k und kf ziemlich groß ist, so ergibt sich bei hohem k ein kleiner, aber merklicher Unterschied in den Harmonieabweichungen, je nachdem man diese in Prozenten von kf oder F_k ausdrückt. Daß wir die Frequenzen F_k als Bezugsfrequenzen wählten, anstatt der kf , was vielleicht besser gewesen wäre, hat einen äußerlichen Grund: zu Beginn der Untersuchungen rechnete man in der Hochfrequenztechnik noch vorwiegend mit elektrischen Wellenlängen und nicht mit Frequenzen. Dieser Gewohnheit sind auch wir bei den meisten Versuchen gefolgt und haben ursprünglich die Harmonieabweichungen aus den Wellenlängendifferenzen, und zwar in Prozenten der harmonischen Wellenlängen berechnet. Infolge der Reziprozität zwischen f und λ haben die relativen Frequenz- und Wellenlängendifferenzen nach Größe und Vorzeichen die gleichen Beträge, wenn man sie in dem einen Fall auf die harmonischen, im anderen auf die tatsächlichen Frequenzen bzw. Wellenlängen bezieht [vgl. Formel (9) und (10)].

Tabelle 13

Stäbe II	Nr.	L_s	S_s	S_s
1		80	1,5	3 mm
2		80	1,5	3 "
3a		62	1,5	3 "

18 und 19 50 kreisförmig, Durchmesser 3 mm.

 δ_k in Promille, berechnet nach Seriengesetz I.Meßgenauigkeit: 0,1 Promille; bei Nr. 19 für $k > 9$ u. bei Nr. 18 nur 1 Promille

k	Nr. 1			Nr. 2 ¹⁾		Nr. 3a		Nr. 18	Nr. 19	
	δ_k	δ_k		δ_k	berechn.	δ_k	berechn.	δ_k	δ_k	
	beob.	beob.	berechn.	beob.		beob.		beob.	beob.	berechn.
1	—	—	0	0,2	0	— 2,8	1,4	0		
2	1,4	0,5	0	0,4	0	— 1,1	0,4	0,2		
3	0,3	0,5	0,1	0,2	0,1	0,7	0,5	0,5		
4	0,3	0,4	0,1	— 0,3	0,2	1,4	1,0	1,0		
5	{ 0,9	0,4	0,2	0,2	0,3	0,8	1,5	1,8		
	{ 0,4									
6	{ 0,6	0,5	0,3	0,4	0,5	2,9	2,5	2,8		
	{ 0,5									
7	0,7	0,5	0,5	0,5	0,7	4,7	3,9	4,2		
8	0,6	0,7	0,6	0,9	1,0	5,5	5,8	6,0		
9	0,9	1,0	0,8	1,6	1,4	9,0	8,3	8,4		
10	1,0	1,1	1,1	1,8	1,9	11,9	11,9	11,7		
11	1,4	1,5	1,4	2,5	2,5	15,5	15,8	15,8		
12	1,7	{ -0,2	1,8	{ 4,3	3,2	21,4	20,7	21,3		
		{ 2,7		{ 0,7						
13	2,6	2,2	2,1	4,3	4,1	27,8	27,4	28,6		
14	2,8	2,8	2,7	5,5	5,2	35,9	38,0	38,4		
15	3,5	3,1	3,3	6,3	6,6	51,2	52,0	51,4		
16	{ 5,5	4,4	4,0	8,6	8,2	66,0	69,5	69,0		
	{ 0,8									
17	5,7	4,9	4,8	10,7	10,2	88,0	93,1	93,6		
18	6,2	5,6	5,7	12,4	12,8	119,6	122,4	128,2		
19	{ 10,6	6,8	6,8	16,1	16,1	152,7	154,2	179,0		
	{ 5,8									
20	8,5	8,3	8,0	20,5	20,2	—	—	—		
21	10,1	9,3	9,5	26,7	25,5	—	—	—		
22	{ 15,2	11,1	11,2	34,5	32,2	—	—	—		
	{ 10,2									
23	13,7	13,1	13,1	47,8	41,1	—	—	—		
24	15,9	15,1	15,6	—	—	—	—	—		
25	{ 20,2	18,2	18,2	—	—	—	—	—		
	{ 15,4									
26	21,9	21,8	21,4	—	—	—	—	—		
27	{ 27,1	26,7	25,3	—	—	—	—	—		
	{ 24,4									
28	33,6	33,5	29,8	—	—	—	—	—		
29	43,2	40,9	35,2	—	—	—	—	—		
30	55,9	52,7	41,7	—	—	—	—	—		

1) Bei 80 mm langen Stäben II gelang es nicht, die Grundschwingung $k=1$ hinreichend stark anzuregen, weil man nur Streulinien des durch die Anregungselektroden erzeugten Wechselfeldes ausnutzen kann. Für $k=1$ ist bei Stab Nr. 2 zur Rechnung ein Mittelwert benutzt, der sich ergibt, wenn man die bei $k=2, 3, 5, 6, 7$ beobachteten Frequenzwerte nach Division durch das zugehörige k mittelt. Ähnlich ist bei Nr. 1 verfahren.

Tabelle 14
 δ_k in Promille; Stäbe I, Nr. 125, 126, 127, 129, 118;
 Meßgenauigkeit 0,1 Promille

k	$L_y = 80, S_z = 1,5 \text{ mm}$			$L_y = 50, S_z = 1,5 \text{ mm}$			
	Nr. 125; $S_z = 1,5$	Nr. 127; $S_z = 3$	Nr. 126; $S_z = 6$	Nr. 129; $S_z = 3$		Nr. 118; $S_z = 6$	
	δ_k beob.	δ_k beob.	δ_k beob.	δ_k beob.	δ_k ber. n. Ser.- Ges. II	δ_k beob.	δ_k ber. n. Ser.- Ges. II
1	0	0	0	- 0,8	0	0	0
2	- 0,3	0,1	- 0,5	- 0,2	0,1	0	0,3
3	- 0,1	0,3	0,3	0,1	0,2	0	0,9
4	- 0,1	0,1	1,8	0,6	0,5	1	2,1
5	0	0,4	{ 13,7	0,7	0,9	4	4,1
6	- 0,2	1,1	- 7,8	1,5	1,5	7	8,2
7	0	{ - 0,9	- 0,3	2,4	2,2	18	18,0
8	0	13,7	1,8	1,4	3,2	45	49,5
9	0,2	0,8	4,5	3,8	4,5	—	—
10	0,5	1,2	8,5	5,5	6,4	—	—
11	0,2	{ 18,9	{ - 11,5	—	—	—	—
12	0,5	2,2	—	7,9	8,9	—	—
13	0,7	{ 4,2	0	11,7	12,5	—	—
14	1,9	- 10,2	6,6	12,8	17,9	—	—
15	0,8	0,4	14,5	22,5	25,9	—	—
16	1,2	{ 18,7	26,7	41,1	41,4	—	—
17	1,6	1,8	46,5	72,1	66,6	—	—
18	2,3	{ 37,3	—	—	—	—	—
19	1,1	3,0	—	—	—	—	—
20	1,9	4,2	—	—	—	—	—
21	2,4	- 29,8	—	—	—	—	—
22	3,0	6,7	—	—	—	—	—
23	4,0	- 13,3	—	—	—	—	—
24	2,0	12,4	—	—	—	—	—
25	3,3	- 1,4	—	—	—	—	—
26	4,0	3,0	—	—	—	—	—
27	4,6	23,3	—	—	—	—	—
28	5,7	4,9	—	—	—	—	—
29	{ 8,0	36,4	—	—	—	—	—
30	1,6	6,9	—	—	—	—	—
31	4,7	9,9	—	—	—	—	—
32	5,9	- 12,0	—	—	—	—	—
33	6,9	16,0	—	—	—	—	—
33	8,0	- 0,1	—	—	—	—	—

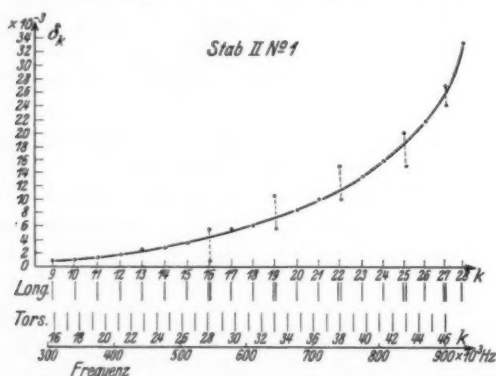
u. a., daß der Frequenzwert $1306 \cdot 10^3$ Hz der 24. harmonischen Oberschwingung erst bei der Ordnung $k = 25$ der wirklichen Schwingungen erreicht wird; die letzteren haben also bei gleicher Ordnung stets eine niedrigere Frequenz als die harmonischen. Nur bei den kleinsten Ordnungen $k = 1$ und 2 tritt bei einigen Stäben, so auch im Beispiel Tab. 7 die in § 6 schon besprochene Anomalie auf. Wie die in den Spalten 7 und 8 angegebenen Harmonieabweichungen δ_k berechnet sind, wird in den §§ 14 und 15 erläutert. Für die übrigen untersuchten Stäbe sind in den Tabellen 8—14 nur die beobachteten und die berechneten Werte δ_k mitgeteilt; die Grundfrequenzen f sind aus Tab. 3 zu entnehmen, aus diesen ergeben sich die harmonischen Werte und mit Hilfe der δ_k (beob.) die beobachteten Werte F_k . Der Betrag der jeweils angebrachten Korrektur ϵ ist in Tab. 16 angegeben.

§ 10. Kopplung zwischen Dehnungs- und Drillungsschwingungen Dubletts; Koinzidenzen

Außer den schon in § 6 behandelten Anomalien bei den tiefsten Eigenfrequenzen, die wir auf Verwachsungen zurückführten, wurden in manchen Fällen noch andere Anomalien beobachtet, nämlich zwei mehr oder weniger nahe benachbarte Eigenfrequenzen einer und derselben Ordnungszahl k . Das Studium der Drillungsschwingungen von Quarzstäben, worüber wir in einer späteren Arbeit berichten werden, lehrt nun, daß bei solchen „Dubletts“ in der Regel eine Torsionseigenfrequenz nahezu mit einer longitudinalen zusammenfällt. Wir wollen dies zunächst für Stäborientierung II an einem besonders auffälligen Beispiel näher erläutern. In Fig. 4 ist die Kurve der Harmonieabweichungen δ_k als Funktion von k für den Stab Nr. 1 aus Tab. 13 im Bereich von $k = 9$ bis $k = 28$ dargestellt. Hier sind 5 Dubletts beobachtet; die δ_k -Werte der beiden Frequenzen jeden Dubletts, welche durch die Endpunkte der fünf vertikalen Geraden gekennzeichnet sind, liegen deutlich außerhalb des im übrigen stetigen Kurvenzuges. Unterhalb der Abszissenachse der Fig. 4 ist das Frequenzspektrum der longitudinalen und das der Torsionseigenschwingungen¹⁾ über-

1) Das Torsionsspektrum ist bis zu $k = 46$ eingetragen; es sei bemerkt, daß tatsächlich die Torsionseigenschwingungen bei Stab Nr. 1 nur bis zur Ordnung $k = 28$, bei einem anderen Stab Nr. 2, von gleichen Abmessungen wie Nr. 1, bis zu $k = 39$ leuchtend angeregt werden konnten; jedoch sind die Harmonieabweichungen δ_k dieser Schwingungen so klein, daß man unbedenklich bis zu $k = 46$ extrapolieren darf, wo δ_k erst etwa 1 Proz. beträgt.

einander eingezeichnet. Man sieht, daß bei jedem der fünf beobachteten Dubletts der δ_k -Kurve eine Koinzidenz von Eigenfrequenzen beider Schwingungstypen vorliegt. Aus den Messungen des Spektrums der Torsionsschwingungen hat sich ergeben, daß die Torsionsgrundfrequenz eines Quarzstabes der Länge L_z von den Abmessungen und der Orientierung des Querschnittes wie bei Stab Nr. 1 als $f_{\text{tors.}}^{k=1} = 1,55_0 \cdot 10^5 : L_z$ zu berechnen ist. Andererseits ist nach Formel (23) und Tab. 6 $f_{\text{long.}}^{k=1} = 2,71_8 \cdot 10^5 : L_z$ und demnach $f_{\text{long.}}^{k=1} : f_{\text{tors.}}^{k=1} = 1,75_1$. Diese Zahl ist sehr nahe gleich $7:4 = 1,750$, d. h. wenn die Ober-



Störungen der Dehnungsschwingungen eines Stabes der Orientierung II durch Kopplung mit Drillungsschwingungen infolge von Verwachsungen

Fig. 4

schwingungen der beiden Schwingungstypen genau harmonisch wären, so würden für beliebige Stablängen in regelmäßigen Abständen bei den Ordnungen $k_{\text{long.}} = 4, 8, 12, 16 \dots$ bzw. $k_{\text{tors.}} = 7, 14, 21, 28 \dots$ Koinzidenzen eintreten. In der Tat sind bei $k_{\text{long.}} = 16$ und ferner für Stab Nr. 2 (vgl. Tab. 13), der Nr. 1 nach Orientierung und Abmessungen gleicht, bei $k_{\text{long.}} = 12$ sowie im Torsionsspektrum von Nr. 2 bei $k_{\text{tors.}} = 7$ Dubletts beobachtet. Weitere Beispiele sind die Oberschwingungen $k_{\text{long.}} = 4$ für Stab Nr. 4 und Nr. 3b in Tab. 12, ferner $k_{\text{long.}} = 12$ für Stab Nr. 3a in Tab. 13. Dagegen ist für Nr. 1 die bei $k_{\text{long.}} = 20$ und $k_{\text{tors.}} = 35$ zu erwartende Koinzidenz nach Fig. 4 bereits bei $k_{\text{long.}} = 19$ bzw. $k_{\text{tors.}} = 33$ eingetreten, also bei einem Verhältnis $33:19 = 1,736$, das rund 1 Proz. kleiner als

der obige theoretische Wert $1,75_4$ ist. Die Verschiebung dieser und der folgenden Koinidenzen erklärt sich aus der Harmonieabweichung, die für die Dehnungsschwingungen bei $k_{\text{long.}} = 19$ (Tab. 13) $\delta_k = + 6,8$ Promille beträgt und für die Drillungsschwingungen bei $k_{\text{tors.}} = 33$ zu $\delta_k = - 5$ Promille gemessen wurde. Da das Vorzeichen der δ_k bei den beiden Schwingungstypen entgegengesetzt ist, so wird mit zunehmender Ordnung die Frequenzdifferenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Oberschwingungen in dem einen Fall immer kleiner, im anderen immer größer, die Koinidenzlage verschiebt sich also aus einem doppelten Grunde. Maßgebend ist allerdings hauptsächlich die Harmonieabweichung der Dehnungsschwingungen, die mit wachsendem k stark beschleunigt ansteigt, während diejenige der Drillungsschwingungen bei hohem k viel kleiner ist und ungefähr proportional mit k zunimmt.

Die Tatsache der Koinidenz allein kann allerdings das Entstehen der Dubletts nicht erklären, denn das elektrische Wechselfeld, welches die piezoelektrische Anregung von Drillungsschwingungen erfordert, ist durchaus verschieden von dem zur Anregung von Dehnungsschwingungen notwendigen, so daß unter den Anregungsbedingungen der einen Schwingungsart im allgemeinen keineswegs Schwingungen der anderen Art entstehen können, auch wenn man die Frequenz des erregenden Feldes mit einer Eigenfrequenz der einen oder anderen Art zur Resonanz bringt. Man muß also zur Erklärung der Entstehung der Dubletts eine mehr oder weniger lose Kopplung zwischen Dehnungs- und Drillungsschwingungen annehmen, was freilich für den Fall statischer, gleichförmiger Dehnung aus der Formel (2) der Theorie nicht zu entnehmen ist. Wie Fig. 4 zeigt, liegt keine der beiden Frequenzen eines Dubletts auf dem Kurvenzuge der ungestörten Eigenfrequenzen im Einklang mit der Kopplungstheorie, wonach die Eigenfrequenzen zweier Schwingungssysteme durch Kopplung erhöht bzw. erniedrigt werden. In einigen Fällen, wovon wir oben schon ein Beispiel anführten, wurden die gleichen Dubletts bei den gleichen Frequenzen sowohl unter den Anregungsbedingungen der Dehnungs- als auch denen der Drillungsschwingungen beobachtet. Im allgemeinen sind diese Dubletts bei Stäben II leichter unter den Anregungsbedingungen der Dehnungsschwingungen leuchtend zu beobachten. Ferner bedarf die eine Eigenschwingung derselben meist einer viel höheren Anregungsspannung als die andere,

darauf ist es z. T. zurückzuführen, daß Dubletts trotz Bestehens einer Koinzidenz der besprochenen Art der Beobachtung entgangen sein können. Man hätte in jedem Falle besonders danach suchen müssen, was nicht immer geschehen ist, weil man die geschilderten Zusammenhänge nicht kannte. Jetzt wissen wir, daß schon das Aussehen der Leuchterscheinung einer Longitudinalschwingung durch mehr oder weniger ausgesprochene Verzerrungen das Vorhandensein einer nahe benachbarten Störfrequenz anzeigt. Als Beispiel hierfür ist in Fig. 5 das stark verzerrte Leuchtbild *a* des Stabes Nr. 1 für die



Verzerrung des Leuchtbildes einer Dehnungsschwingung durch nahe benachbarte Drillungsschwingung. Stab II Nr. 1 (Tabelle 13);

a: $k = 16$ verzerrt; *b*: $k = 15$ unverzerrt

Fig. 5

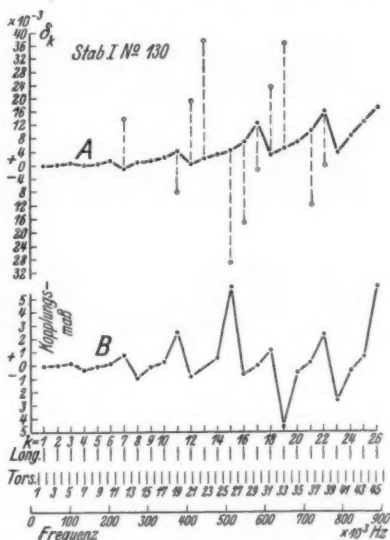
eine Schwingung des Dubletts bei $k_{\text{long.}} = 16$ wiedergegeben¹⁾ und zur Vergleichung hiermit das ganz regelmäßige Leuchtbild *b* der benachbarten ungestörten Longitudinalschwingung $k = 15$. Das Leuchtbild der zweiten Dublettschwingung zeigt, wie meist auch in anderen Fällen, nur geringe Störungen, die in der Photographie kaum erkennbar sind. In unseren Beobachtungsprotokollen haben wir stets Notizen über etwaige Verzerrungen gemacht und wir konnten nachträglich feststellen, daß diese in vielen Fällen auf mehr oder weniger enges Zusammenfallen der Dehnungsschwingungen mit Drillungsschwingungen, in einigen Fällen auch auf nahe benachbarte Biegungsschwingungen zurückzuführen sind. Nur wenige Dublette blieben unerklärbar, z. B. diejenigen für $k = 5$ und 6 beim Stab Nr. 1.

1) Um die Verzerrungen möglichst deutlich hervortreten zu lassen, muß man den Gasdruck durch Probieren passend wählen. Abzusehen ist von den Störungen der Leuchtbilder durch die Anregungselektroden, deren Lage meist, wie in Fig. 5, durch Vorbelichtung bei nicht leuchtendem Stabe sichtbar gemacht wurde.

Unsere Erfahrungen machen es sehr wahrscheinlich, daß die Entstehung von Dubletts bei Stäben der Orientierung II durch Kristallverwachsungen begünstigt wird. Dafür spricht das verschiedene Verhalten der beiden gleichen Stäbe Nr. 1 und Nr. 2, die beide mit der gleichen Sorgfalt auf Dubletts untersucht wurden: bei Nr. 1 sind weit mehr Dubletts beobachtet als bei Nr. 2. Ähnlich verschieden verhielten sich auch die beiden Stäbe Nr. 4 und Nr. 3b (Tab. 12). Der Stab Nr. 2, von der Herstellerfirma besonders sorgfältig untersucht und ausgewählt, erwies sich bei unseren Prüfungsmitteln als homogen, während Nr. 1 zweifellos

Verwachsungen hat, denn hier fehlten in den Leuchtbildern aller longitudinalen Oberschwingungen höherer Ordnung (ähnlich auch bei Drillungsschwingungen) regelmäßig an einer und derselben Stelle des einen Stabendes ein oder mehrerer Leuchtflecke, was auch in den Photos Fig. 5 (linkes Stabende) zu sehen ist; diese Verwachsung wird wohl auch die Ursache der Dublette bei $k_{\text{long.}} = 5$ und 6 sein, die bei Stab Nr. 2 nicht beobachtet wurden; die gleiche Ursache liegt wahrscheinlich im Falle des Stabes II 11b (Tab. 11) bei $k = 1$ vor.

Unabhängig von Verwachsungen besteht jedoch anscheinend auch bei völlig homogenen Stäben stets eine lose Kopplung zwischen Dehnungs- und Drillungsschwingungen. Aus unserem gesamten Beobachtungsmaterial kann man ferner schließen, daß diese Kopplung fester ist, wenn die größere Querdimension parallel zur optischen Achse liegt, wie wenn sie senkrecht dazu steht, weil



Störungen der Dehnungsschwingungen durch Kopplung mit Drillungsschwingungen bei Stäben der Orientierung I

Fig. 6

im letzten Falle weniger oft Verzerrungen des Leuchtbildes und Doublets beobachtet wurden.

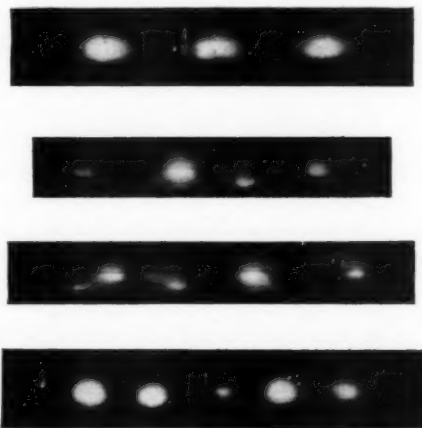
Auch bei Stäben der Orientierung I sind die Dehnungsschwingungen mit Drillungsschwingungen gekoppelt. Die eigentümlichen, periodischen Schwankungen in der Größe der Harmonieabweichungen, wie sie die Fig. 2 und 6A zeigen, sind auf solche Kopplungen zurückzuführen, die bei der Stabsorte I viel fester als bei Sorte II ist. Die Rückwirkung der Drillungsschwingungen auf die Dehnungsschwingungen macht sich hier nicht nur bei nahezu koinzidierenden Eigenfrequenzen beider Schwingungsarten geltend, sondern bedingt einen völlig anderen Verlauf der δ_k -Kurve, wie die Vergleichung der Fig. 6A mit 4 lehrt, die für gleich dimensionierte Stäbe der beiden Orientierungen beobachtet sind. Zur Aufklärung dieses merkwürdigen Verhaltens haben wir mehrere Stäbe gleicher Abmessungen ($L_y = 80$, $S_x = 1,5$, $S_z = 3$ mm) eingehend untersucht; und bei allen Stäben identische Resultate gefunden, so daß die beobachteten Anomalien nicht etwa durch Verwachsungen oder Orientierungsfehler erklärt werden können. Wie aus Fig. 6A für Stab I Nr. 130 als Beispiel ersichtlich, sind bei vielen longitudinalen Ordnungen k Doublets beobachtet. Die beiden Frequenzen und Doublets, deren Lage in Fig. 6A durch die Endpunkte der gestrichelten vertikalen Geraden gekennzeichnet ist und deren Differenz bis zu 4 Proz. beträgt, unterscheiden sich hinsichtlich ihrer Anregbarkeit und des Aussehens ihres Leuchtbildes. Die eine Eigenschwingung, l , jeden Doublets ist etwa ebenso leicht leuchtend anregbar wie die einwelligen Eigenschwingungen, während für die andere Eigenschwingung, t , desselben meist, wenn auch nicht in allen Fällen, eine viel höhere Wechselspannung an den Anregungselektroden erforderlich ist. Das Leuchtbild der Schwingungen l ist zwar mehr oder weniger verzerrt gegenüber dem ganz ungestörten Leuchtbild der einwelligen Eigenfrequenzen, jedoch kann man ohne Schwierigkeiten den longitudinalen Schwingungstyp erkennen und die Ordnungszahl k abzählen. Bei den Schwingungen t hingegen konnte man nur in einzelnen Fällen im Leuchtbild noch die longitudinale Ordnung einigermaßen erkennen, meist war das Leuchtbild außerordentlich kompliziert, wie es nach unseren früheren Untersuchungen¹⁾ bei Torsionsschwingungen vor-

1) Vgl. Fußnote 1, S. 93.

handen ist, und entsprach einer viel größeren Anzahl elastischer Halbwellen als nach der longitudinalen Ordnung zu erwarten.

Um eine Vorstellung zu geben von dem Aussehen der Leuchtbilder der beiden Dublettschwingungen in einem Fall, wo für beide die Verzerrung etwa die gleiche ist, sind in Fig. 7 b und c für die longitudinale Ordnung $k = 4$ photographische Aufnahmen wieder-

gegeben. Die beiden Photos a und d zeigen zum Vergleich die ungestörten Leuchtbilder des longitudinalen Typs für die nächst tiefere bzw. höhere Oberschwingung $k = 3$ bzw. 5. Bemerkenswert ist der Unterschied in der Ladungsverteilung bei den beiden Leuchtbildern b und c des Dubletts; bezüglich der Stabachse sind sie spiegelbildlich symmetrisch. Die Ordnungszahl 4 ist deutlich erkennbar (vgl. auch Fig. 8).



Verzerrung des Leuchtbildes einer Dehnungsschwingung durch nahe benachbarte Drillungsschwingung; Orientierung I;

a und d unverzerrt, $k = 3$ bzw. 5,

b und c Dublett, verzerrt, $k = 4$

Fig. 7

Die komplizierten Leuchtbilder der Schwingungen t waren oft nur an einem Teil der ganzen Länge des Quarzstabes und nur dann zu beobachten, wenn, infolge der notwendigen hohen Wechsellspannung, das den Stab umschließende Vakuumrohr völlig mit Glimmlicht erfüllt war. Diese Verhältnisse sind in der graphischen Darstellung der Harmonieabweichung Fig. 6 A folgendermaßen kenntlich gemacht. Der starke Linienzug verbindet in der Reihenfolge der longitudinalen Ordnung die einwilligen Eigenschwingungen und die Schwingungen l der Dubletts, die Kreise an den Enden der gestrichelten vertikalen Geraden entsprechen den Schwingungen t der Dubletts. Wir

deuten die Schwingungen l bzw. t als durch Kopplung gestörte Longitudinal- bzw. Torsionsschwingungen. Der Einfluß der Kopplung wird um so größer sein, je geringer die Differenz zwischen zwei Eigenfrequenzen der beiden Schwingungsarten ist. Berechnet man die Reihe unter der Voraussetzung völliger Harmonie für die Dehnungsschwingungen gemäß Tab. 6 zu $f_{\text{long.}} = k' \cdot 2,73 \cdot 10^5 \cdot L$ und für die Drillungsschwingungen auf Grund besonderer Messungen zu $f_{\text{tors.}} = k'' \cdot 1,57_5 \cdot 10^5 \cdot L$ beim Verhältnis $S_z/S_x = 3:1,5 = 2$, so erhält man über den Frequenzwerten in Fig. 6 B die beiden übereinander gezeichneten Spektren. Bildet man ferner die relativen Differenzen $(f_{\text{long.}}^{k'} - f_{\text{tors.}}^{k''}) : f_{\text{long.}}^{k'}$ bzw. $(f_{\text{long.}}^{k'} - f_{\text{tors.}}^{k''+1}) : f_{\text{long.}}^{k'}$ einer Longitudinalschwingung und den beiden benachbarten Torsionsschwingungen und beachtet man, daß der Kopplungseinfluß um so stärker ist, je geringer der positive bzw. negative Betrag jener Differenzen ist, so kann man die algebraische Summe der reziproken Differenzen, also die Größe $\alpha = f_{\text{long.}}^{k'} : (f_{\text{long.}}^{k'} - f_{\text{tors.}}^{k''}) + f_{\text{long.}}^{k'} : (f_{\text{long.}}^{k'} - f_{\text{tors.}}^{k''+1})$ als angenähertes Kopplungsmaß ansetzen. Diese Größe ist in Fig. 6 B als Funktion der longitudinalen Ordnungszahl eingezeichnet und man erkennt unmittelbar, daß der berechnete Linienzug B dem Linienzug A der beobachteten Harmonieabweichungen δ_k in allen wesentlichen Eigenschaften entspricht. Der periodisch sich wiederholende Sprung der δ_k -Werte von einem hohen Betrag bei einer longitudinalen Ordnung k' zu einem niedrigen bei der nächstfolgenden Ordnung $k' + 1$ trifft immer dann ein, wenn α das Vorzeichen wechselt, d. h. wenn die harmonische Frequenz der Schwingung k' höher bzw. diejenige von $k' + 1$ niedriger als die nächst gelegene harmonische Torsionseigenfrequenz k'' bzw. $k'' + 2$ ist. Dementsprechend muß nach der Kopplungstheorie die Frequenz der Schwingung k' bzw. $k' + 1$ gegenüber dem harmonischen Wert durch die Rückwirkung der Torsionsschwingungen erniedrigt bzw. erhöht werden, wie es beobachtet ist. Diese Rückwirkung muß nach der Theorie am stärksten sein im Falle der völligen Koinzidenz zweier Eigenfrequenzen beider Schwingungsarten, also, wenn diese, ohne Kopplung, völlig harmonisch wären, bei einem Verhältnis der Ordnungszahlen, das sich aus den oben angegebenen Zahlenwerten unabhängig von der Stablänge zu $k'' : k' = 2,73 : 1,57_5 = 1,73_4 \approx 4:7$ ergibt. Nun sind aber,

wie unsere Untersuchungen gelehrt haben, die Oberschwingungen beider Schwingungsarten, auch wenn keine Kopplung zwischen ihnen besteht, noch aus anderen Gründen nicht genau harmonisch. Da diese Harmonieabweichungen mit wachsender Ordnungszahl immer mehr zunehmen, so tritt eine entsprechende Verschiebung der Koinidenzen besonders bei höheren Ordnungen ein, wo die relativen Frequenzdifferenzen aufeinanderfolgender Eigenfrequenzen nur noch wenige Prozent betragen. Daher kann man aus dem Verhältnis $k'':k' = 1,73_4 \approx 4:7$ die Koinidenzen nur bei niedrigen Ordnungen vorausberechnen.



Verzerrung des Leuchtbildes einer Dehnungsschwingung, $k = 5$, durch Drillungsschwingung, Dublett, Stab I Nr. 126

Fig. 8

In den beobachteten Beträgen δ_k der Fig. 6A ist in der Tat auch bei $k' = 4$ eine Störung durch $k'' = 7$ angedeutet und bei mehreren kürzeren Stäben [$L_y = 45$ (Nr. 116, vgl. auch Fig. 7), 43,3 und 22,4] gleicher Querdimensionen sind bei $k' = 4$ auch Dubletts beobachtet. Offenbar nimmt die Kopplung zwischen den beiden Schwingungsarten mit abnehmendem Verhältnis der Querdimension S_z zur elastischen Wellenlänge zu. Daher sind die Kopplungsstörungen bei dem Stabe Nr. 125 ($L_y = 80$, $S_z = S_x = 1,5$ mm) viel kleiner (Fig. 2B), beim Stabe Nr. 126 ($L_y = 80$, $S_z = 6$, $S_x = 1,5$ mm) in Fig. 2A aber viel größer als bei Nr. 130 in Fig. 6A. Im Falle der größten Querdimension $S_z = 6$ ist schon bei $k = 5$ ein Dublett beobachtet und die Leuchtbilder dieser beiden Schwingungen sind, wie die Photos Fig. 8 zeigen, bereits so stark verzerrt, daß die longitudinale Ordnung $k = 5$ kaum noch erkennbar ist; das longitudinale Spektrum dieses Stabes ist infolge der zahlreichen Nebenschwingungen oberhalb etwa $k = 10$ kaum noch entwirrbar. Die gleichen Schwierigkeiten treten bei dem Stabe Nr. 130 (Fig. 6A) erst oberhalb etwa $k = 20$ ein. Da die longitudinalen

Eigenfrequenzen nur von der Stablänge (wenigstens in erster Annäherung), die torsionellen aber auch vom Verhältnis der Querdimensionen abhängen, so verschieben sich mit der Größe der Querdimensionen bei gleichbleibender Länge auch die Koinzidenzen und der ganze Verlauf der δ_k -Kurve ändert sich völlig. Die bisherigen Ausführungen über Stäbe I bezogen sich auf ein Querdimensionsverhältnis $S_z \geq S_x$. Bemerkenswert ist noch die Tatsache, daß die Kopplung zwischen Dehnungs- und Drillungsschwingungen viel loser oder verschwindend klein ist, wenn $S_x > S_z$ ist, denn die δ_k -Kurve des Stabes I, Nr. 129 ($S_x = 3$, $S_z = 1,5$ mm) weist nach Tab. 14 nur noch kleine Unstetigkeiten auf und beim Stabe I, Nr. 118 ($S_x = 6$, $S_z = 1,5$ mm, vgl. Tab. 14) ist von solchen im Gegensatz zu Stab I, Nr. 126 ($S_x = 6$, $S_z = 1,5$ mm, Fig. 2A) überhaupt nichts mehr zu merken. Die Harmonieabweichungen dieser beiden Stäbe I sind nahezu die gleichen wie diejenigen der entsprechenden Stäbe II gleicher Länge (Nr. 14 und Nr. 10, Tab. 10).

In den in diesem Paragraph geschilderten Verhältnissen offenbart sich die Kristallstruktur des Quarzes in einem je nach ihrer Orientierung sehr verschiedenen Einfluß der Querdimensionen auf das Seriengesetz der longitudinalen Eigenfrequenzen, obwohl nach der kristallographischen Symmetrie für alle Richtungen der Stabachse senkrecht zur optischen Achse der Dehnungsmodul der gleiche ist. Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt die in den Formeln (1) und (2) enthaltenen Gesetze der Dehnung, so wird die Vermutung nahegelegt, daß die für beide Staborientierungen I und II mit der Dehnung verbundenen Winkeländerungen des Längs- bzw. Querschnittes also der verschiedene Einfluß des Moduls s_{14} die Ursache der beobachteten Kopplungserscheinungen sind¹⁾.

§ 11. Ähnlichkeitsgesetz: Für geometrisch ähnliche Stäbe der Orientierung II ist die Harmonieabweichung der Eigenfrequenzen gleich groß

Die Größe der Harmonieabweichungen hängt, wie die Meßergebnisse lehren, nur von den Verhältnissen $S_y:S_z:L_x$ ab.

1) Kopplungserscheinungen, die bei Schwingungen von Quarzplatten auftreten, den sog. Dickenschwingungen, für deren Frequenz die Dicke der Platte maßgebend ist, sind von Lack (Fußnote 2, S. 94) näher untersucht.

Wir schreiben die Ähnlichkeitsbedingung in der allgemeinen Form

$$(24) \quad S_y : S_z : \frac{L_x}{k} = \text{const.},$$

welche zugleich besagt, daß es auch nicht auf die Länge des Stabes, sondern nur auf die Länge der elastischen Welle ankommt. Die Ordnung k der Oberschwingung ist also belanglos, die Vorgänge längs einer elastischen Halbwelle sind auch für Stäbe endlicher Dicke, ebenso wie für unendlich dünne gemäß Formel (4) bei gleichbleibender Wellenlänge L_x/k stets genau die gleichen, unabhängig von der Gesamtzahl der gleichzeitig nebeneinander vorhandenen elastischen Wellen.

Dies Grundgesetz ist vielleicht selbstverständlich, doch schien uns eine experimentelle Bestätigung in Hinblick auf das weiter unten in § 15 auf der Grundlage der Kopplungstheorie abgeleitete Seriengesetz II nicht überflüssig. Überdies stimmte dies Grundgesetz auch in einigen Fällen nicht ohne weiteres innerhalb der zu erwartenden Genauigkeit, sondern erst nach Anbringung der Inhomogenitätskorrektur ε des § 6, die hierdurch eine weitere Begründung erhält. Wir werden im folgenden durch einige in den Tabellen des § 9 enthaltene Beispiele die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes beweisen.

Ein erstes Beispiel können wir den Tabellen 10, 11 für die drei Stäbe Nr. 10, 11a, 12 entnehmen, die bei gleichen Quersdimensionen, $S_y = 3$, $S_z = 1,5$ mm, Längen L_x von 50 bzw. 29,9 bzw. 20 mm haben. Für die den Längenverhältnissen entsprechenden Ordnungen $k = 15$ bzw. 9 bzw. 6 der Oberschwingungen, welchen die gleiche elastische Halbwellenlänge von 3,33 mm zukommt, wurden die Eigenfrequenzen 784,8, 786,4 785,4 kHz und die Harmonieabweichungen 40,8, 41,0, 40,0 · 10⁻³ gemessen, die innerhalb der zu erwartenden Genauigkeit gleich sind.

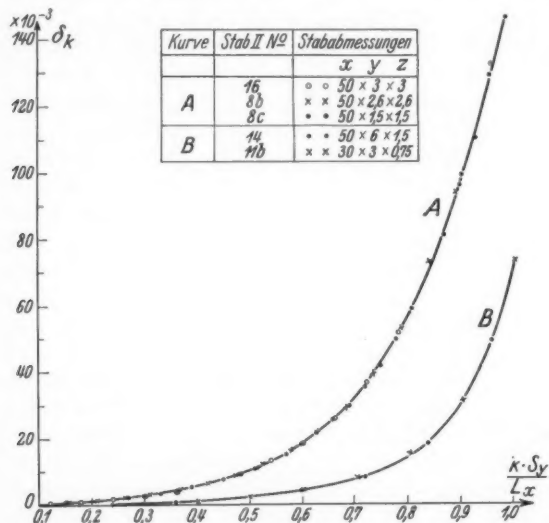
Der Ähnlichkeitsbeziehung (24) genügen ferner die beiden quadratischen Stäbe Nr. 8c und Nr. 16 (Tab. 7 und Tab. 8), deren Seiten (1,5 und 3 mm) im Verhältnis 1:2 stehen, wenn man diejenigen Eigenfrequenzen der beiden gleichlangen Stäbe in Betracht zieht, deren elastische Wellenlängen im Verhältnis 1:2 stehen, deren Ordnungszahlen sich also wie 2:1 verhalten. Einige aus jenen Tabellen entnommenen Zahlen für die beobachteten Harmonieabweichungen δ_k seien zur bequemen Übersicht hier nebeneinander gestellt:

Stab Nr. 8c

$k = 3$	5	6	7	8	9	10	11	12	13	15
$\delta_k = 0,7$	2,5	4,1	6,3	9,2	13,2	18,6	26,1	36,6	51,8	$99,5 \cdot 10^{-3}$

Stab Nr. 16

$k = 6$	10	12	14	16	18	20	22	24	26	30
$\delta_k = 0,8$	2,6	4,1	6,3	9,2	13,0	18,3	25,5	35,6	50,1	$96,5 \cdot 10^{-3}$



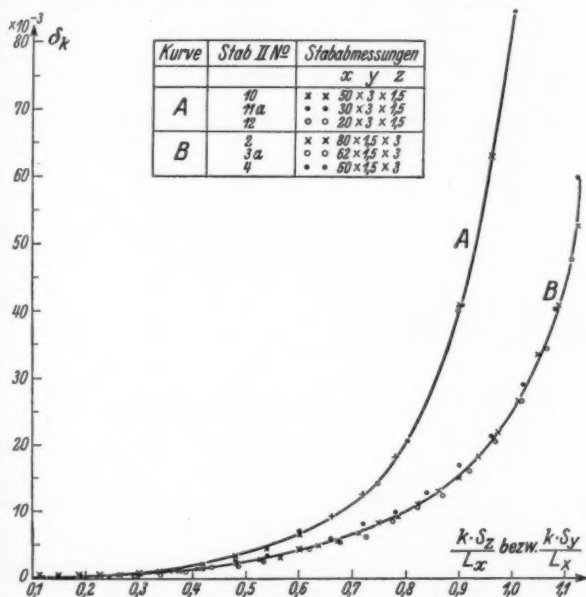
Harmonieabweichungen bei Stäben ähnlichen Querschnittes;
Ähnlichkeitsgesetz

Fig. 9

Die δ_k -Werte beider Stäbe sind in der Tat für die Eigenfrequenzverhältnisse 1:2 sehr nahe gleich groß, was um so bemerkenswerter ist, als die ganz unabhängig hiervon auf anderem Wege (vgl. § 6 und § 14) ermittelte Inhomogenitätskorrektur ε bei Nr. 16 den hohen Wert $-2,9 \cdot 10^{-3}$ gegenüber $+0,2 \cdot 10^{-3}$ bei Nr. 8c hat. Nur bei den höchsten Ordnungen sind Differenzen bis zu einigen Promille vorhanden; dies rührt wahrscheinlich davon her, daß das Verhältnis der Querschnittsseiten der Stäbe etwas größer als 2 ist.

Mit Rücksicht auf dieses Ähnlichkeitsgesetz, dem übrigens auch die Dickenkorrektionsformel nach Rayleigh genügt, stellt

man graphisch die Harmonieabweichungen δ_k zweckmäßig als Funktion des Verhältnisses kS_y/L_z bzw. kS_z/L_x und nicht wie in Fig. 3 als Funktion von k dar, weil derartige Kurven die Größe von δ_k für alle Stäbe, die der Bedingung $S_y/S_z = \text{const}$



Harmonieabweichungen bei verschiedenen langen Stäben gleichen Querschnittes; Ähnlichkeitsgesetz

Fig. 10

genügen, und für beliebige Stablängen und Ordnungen der Oberschwingungen unmittelbar abzulesen gestatten. Für Verhältniszahlen $S_y/S_z = \frac{1}{2}, 1, 2$ und 4 sind in den Figg. 9 und 10 zum experimentellen Beweis des Ähnlichkeitsgesetzes und zugleich zur bequemen praktischen Benutzung solche Kurven wiedergegeben. Die Kurve A in Fig. 9 bezieht sich auf drei quadratische Stäbe von verschiedenen Seitenlängen (1,5, 2,6 und 3 mm), die Kurve B auf zwei rechteckige Stäbe von konstantem Verhältnis S_y/S_z vom Betrage 4, nämlich 6:1,5 bzw. 3:0,75. Man erkennt, daß die Meßpunkte recht gut auf einer und derselben Kurve liegen; ohne Korrektion ε würde das

weniger gut der Fall sein. Auch für äußerst kleine Stabdimensionen, wie z. B. bei Stab II, Nr. 17 (Tab. 9, $L_z = 5$ mm, $S_y = S_z = 0,5$ mm) bleiben diese Kurven gültig; für die 7. Oberschwingung dieses Stabes¹⁾, die bei einer elastischen Wellenlänge von nur 0,71 mm eine Frequenz von $3,68 \cdot 10^6$ Hz ($\lambda = 81,5$ m) hat, ergibt sich aus der Kurve A für die Abszisse $k S_y/L_c = 0,70$ eine Harmonieabweichung von $\delta_k = 3,2$ Proz. in völliger Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Die Gültigkeit des Ähnlichkeitsgesetzes hinsichtlich der Unabhängigkeit von der Stablänge wird durch Kurven A und B der Fig. 10 demonstriert, die sich auf je drei verschiedene Stab-längen bei gleichbleibendem Verhältnis 2 der Querschnittsseiten S_y/S_z (Kurve A) bzw. S_z/S_y (Kurve B) beziehen. Nach Kurve A stimmt jenes Gesetz ebensogut wie im Falle der Fig. 9. Bei Kurve B aber geben die Messungen nicht genau die gleiche Kurve bei allen drei Stäben, die Abweichungen übersteigen zweifellos die Meßgenauigkeit; nach unseren Erfahrungen zeigt überhaupt die Stabsorte II $S_z > S_y$, in mehrfacher Beziehung Unregelmäßigkeiten und anderes Verhalten als die Sorte II, $S_y > S_z$; wir führen diese auf die in § 10 besprochene Kopplung mit Drillungsschwingungen zurück. Beide Sorten unterscheiden sich bei gleicher Größe der Querabmessungen nur durch die Orientierung derselben, welche demnach, wie die Kurven A und B zeigen, von beträchtlichem Einfluß auf die Größe der Harmonieabweichungen ist.

(Schluß folgt.)

1) Zur piezoelektrischen Anregung so kurzer Stäbe der Orientierung II ordnet man zweckmäßig zwei felderregende Elektroden an den beiden kleinen Stirnflächen der Stäbe an. Bei einer solchen Anordnung, die übrigens auch noch für 50 mm lange Stäbe zur Schwingungserregung bis zum Leuchten ausreicht, entstehen jedoch, aus Symmetriegründen, nicht die geradzahigen, sondern nur die ungeradzahigen Oberschwingungen.

(Eingegangen 6. Februar 1931)

nen-
um,
die
hen
Hz
isse
roz.

der
d B
tab-
itts-
ach
g. 9.
iche
igen
zeigt
nung
e II,
lung
iden
die
en A
der
(t.)

ng II
eiden
, die
g bis
nicht
gen.